



**Hugo Daniel Pires
Carriço**

**Influência da Microestrutura nas Propriedades
Termoelásticas de Materiais Compósitos**



**Hugo Daniel Pires
Carriço**

**Influência da Microestrutura nas Propriedades
Termoelásticas de Materiais Compósitos**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, realizada sob a orientação científica do Doutor Joaquim Alexandre Mendes de Pinho da Cruz, Professor Auxiliar Convidado do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro

o júri

presidente

Professor Doutor Robertt Angelo Fontes Valente
Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

Professora Doutora Marta Cristina Cardoso de Oliveira
Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Professor Doutor Joaquim Alexandre Mendes de Pinho da Cruz
Professor Auxiliar Convidado da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Ao Professor Doutor Joaquim Alexandre Mendes de Pinho da Cruz, professor e orientador, pelo apoio incansável e pela disponibilidade constante que ofereceu ao longo da elaboração deste trabalho.

palavras-chave

Materiais Compósitos; Elementos Finitos; Homogeneização por Expansão Assimptótica; Comportamento Termoelástico; Geometria de Células Representativas Unitárias.

resumo

Actualmente, os materiais compósitos têm uma grande importância em aplicações de engenharia. A previsão das propriedades termomecânicas destes materiais é frequentemente efectuada recorrendo à sua modelação numérica detalhada, sendo geralmente requerido o conhecimento prévio das suas propriedades macroscópicas. Este facto leva geralmente à necessidade de grande quantidade de memória e de tempo de cálculo na determinação das propriedades dos materiais compósitos. Um modo de ultrapassar este problema é a utilização de metodologias de homogeneização, das quais se destaca a homogeneização por expansão assimptótica. Esta técnica leva à substituição de um meio heterogéneo por um meio homogéneo equivalente, permitindo, assim, a obtenção de leis de comportamento macroestruturais a partir de informação relativa ao nível microestrutural.

Neste trabalho, procedeu-se a um estudo da influência da microestrutura da célula representativa unitária nas propriedades termoelásticas de materiais compósitos, através de procedimentos numéricos de homogeneização por expansão assimptótica. Os resultados numéricos foram analisados e comparados com resultados experimentais obtidos de fontes bibliográficas.

keywords

Composite Materials; Finite Elements; Asymptotic Expansion Homogenisation; Thermoelastic Behaviour; Geometry of Representative Unit-Cells.

abstract

Nowadays, composite materials are of major importance in engineering applications. The prediction of their thermomechanical properties is usually made by their detailed numerical modelling, which generally requires the previous knowledge of their macroscopic properties. This fact leads generally to the requirement of large amounts of memory and processing time to calculate the properties of composite materials. One way to minimize this problem is to use of homogenisation methodologies, being the Asymptotic Expansion Homogenisation one of the most relevant. This technique allows the replacement of a heterogeneous medium by an equivalent homogeneous one, leading to macrostructural behaviour models based on the information available from the microstructural level.

In this work, a study of the influence of the microstructure of the Representative Unit-Cell on the thermoelastic properties of composite materials was performed, based on Asymptotic Expansion Homogenisation numerical procedures. The numerical results were analysed and compared with experimental results from bibliography.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Homogeneização por Expansão Assimptótica em Termoelasticidade	3
3	Procedimentos Numéricos	7
4	Apresentação e Discussão de Resultados	9
4.1	Análise da Influência da Geometria da Célula Representativa Unitária . . .	9
4.1.1	Definição das Células Representativas Unitárias	9
4.1.2	Estudos de Convergência e Resultados Numéricos de Elasticidade . .	10
4.1.3	Análise de Resultados Numéricos de Termoelasticidade	23
4.1.4	Análise de Resultados Numéricos de Condutividade Térmica	28
4.1.5	Análise das Propriedades Termomecânicas	35
4.2	Análise da Influência das Propriedades dos Materiais da Matriz e do Reforço	41
5	Conclusões Gerais	47
	Bibliografia	49

Lista de Figuras

3.1	Ilustração esquemática da evolução da relação de forma de células representativas unitárias, para inclusões do tipo (a) cilíndrico, (b) elipsoidal e (c) paralelepipedico.	8
4.1	Geometrias das células representativas unitárias com inclusões do tipo cilíndrico, para as relações de forma (a) RF1, (b) RF2, (c) RF3, (d) RF4 e (e) RF5.	11
4.2	Geometrias das células representativas unitárias com inclusões do tipo elipsoidal, para as relações de forma (a) RF1, (b) RF2, (c) RF3, (d) RF4 e (e) RF5.	12
4.3	Geometrias das células representativas unitárias com inclusões do tipo paralelepipedico, para as relações de forma (a) RF1, (b) RF2, (c) RF3, (d) RF4 e (e) RF5.	13
4.4	Evolução da norma de Frobenius de \mathbf{D}^h com o número de graus de liberdade, n_{gl} , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepipedicas (P) de carboneto de silício.	17
4.5	Evolução da variação relativa da norma de Frobenius de \mathbf{D}^h com o número de graus de liberdade, n_{gl} , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepipedicas (P) de carboneto de silício.	18
4.6	Malhas de elementos finitos das células representativas unitárias com inclusões do tipo cilíndrico, para as relações de forma (a) RF1, (b) RF2, (c) RF3, (d) RF4 e (e) RF5.	19
4.7	Malhas de elementos finitos das células representativas unitárias com inclusões do tipo elipsoidal, para as relações de forma (a) RF1, (b) RF2, (c) RF3, (d) RF4 e (e) RF5.	20
4.8	Malhas de elementos finitos das células representativas unitárias com inclusões do tipo paralelepipedico, para as relações de forma (a) RF1, (b) RF2, (c) RF3, (d) RF4 e (e) RF5.	21
4.9	Componentes das matrizes constitutivas, \mathbf{D}^h , obtidas para células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepipedicas (P) de carboneto de silício (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%).	22

4.10	Deslocamentos característicos da célula representativa unitária de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas de carboneto de silício (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%) — modos normais (a) χ_{11} , (b) χ_{22} e (c) χ_{33} , e modos de corte (d) χ_{12} , (e) χ_{23} e (f) χ_{13}	24
4.11	Deslocamentos característicos da célula representativa unitária de material compósito de alumínio reforçado com inclusões elipsoidais de carboneto de silício (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%) — modos normais (a) χ_{11} , (b) χ_{22} e (c) χ_{33} , e modos de corte (d) χ_{12} , (e) χ_{23} e (f) χ_{13}	25
4.12	Deslocamentos característicos da célula representativa unitária de material compósito de alumínio reforçado com inclusões paralelepipedicas de carboneto de silício (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%) — modos normais (a) χ_{11} , (b) χ_{22} e (c) χ_{33} , e modos de corte (d) χ_{12} , (e) χ_{23} e (f) χ_{13}	26
4.13	Y-periodicidade dos deslocamentos característicos — ilustração do modo de corte χ_{13} , utilizando 8 células representativas unitárias de material compósito de alumínio com inclusões (a) cilíndricas, (b) elipsoidais e (c) paralelepipedicas de carboneto de silício (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%).	27
4.14	Evolução da norma euclidiana de β^h com o número de graus de liberdade, n_{gl} , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepipedicas (P) de carboneto de silício.	28
4.15	Evolução da variação relativa da norma euclidiana de β^h com o número de graus de liberdade, n_{gl} , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepipedicas (P) de carboneto de silício.	29
4.16	Componentes dos vectores dos módulos térmicos, β^h , obtidos para células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepipedicas (P) de carboneto de silício (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%).	30
4.17	Campo vectorial dos coeficientes característicos de dilatação linear efectiva Ψ de uma célula representativa unitária de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas de carboneto de silício (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%) — representação (a) no exterior, (b) no interior da matriz e (c) no interior do reforço da célula representativa unitária.	31
4.18	Campo vectorial dos coeficientes característicos de dilatação linear efectiva Ψ de uma célula representativa unitária de material compósito de alumínio reforçado com inclusões elipsoidais de carboneto de silício (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%) — representação (a) no exterior, (b) no interior da matriz e (c) no interior do reforço da célula representativa unitária.	32

4.19	Campo vectorial dos coeficientes característicos de dilatação linear efectiva Ψ de uma célula representativa unitária de material compósito de alumínio reforçado com inclusões paralelepipedicas de carboneto de silício (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%) — representação (a) no exterior, (b) no interior da matriz e (c) no interior do reforço da célula representativa unitária.	33
4.20	Evolução da norma de Frobenius de \mathbf{k}^h com o número de graus de liberdade, n_{gl} , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepipedicas (P) de alumina.	34
4.21	Evolução da variação relativa da norma de Frobenius de \mathbf{k}^h com o número de graus de liberdade, n_{gl} , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepipedicas (P) de alumina.	34
4.22	Componentes das matrizes de condutividade térmica, \mathbf{k}^h , obtidas para células representativas unitárias de material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepipedicas (P) de alumina (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%).	35
4.23	Campo vectorial dos deslocamentos termocaracterísticos Υ de uma célula representativa unitária de material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com inclusões cilíndricas de alumina (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%) — representação (a) no exterior, (b) no interior da matriz e (c) no interior do reforço da célula representativa unitária. . . .	36
4.24	Campo vectorial dos deslocamentos termocaracterísticos Υ de uma célula representativa unitária de material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com inclusões elipsoidais de alumina (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%) — representação (a) no exterior, (b) no interior da matriz e (c) no interior do reforço da célula representativa unitária. . . .	37
4.25	Campo vectorial dos deslocamentos termocaracterísticos Υ de uma célula representativa unitária de material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com inclusões paralelepipedicas de alumina (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%) — representação (a) no exterior, (b) no interior da matriz e (c) no interior do reforço da célula representativa unitária. . . .	38
4.26	Evolução do módulo de elasticidade longitudinal na direcção das inclusões, E_{22} , com a relação de forma, RF , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepipedicas (P) de carboneto de silício, e resultado experimental.	39
4.27	Evolução do coeficiente de expansibilidade térmica na direcção das inclusões, α_{22} , com a relação de forma, RF , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepipedicas (P) de carboneto de silício, e resultado experimental.	40

4.28	Evolução do coeficiente de condutividade térmica na direcção das inclusões, k_{22} , com a relação de forma, RF , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepípedicas (P) de alumina, e resultado experimental. . .	40
4.29	Evolução do coeficiente de expansibilidade térmica na direcção das inclusões, α_{22} , com a relação de forma, RF , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de cobre reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepípedicas (P) de diamante, e resultado experimental.	43
4.30	Evolução do coeficiente de condutividade térmica na direcção das inclusões, k_{22} , com a relação de forma, RF , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de resina epóxida reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepípedicas (P) de sílica, e resultado experimental.	43
4.31	Evolução do factor (adimensional) do módulo de elasticidade longitudinal na direcção das inclusões, E_{22} , com a relação de forma, RF , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepípedicas (P).	44
4.32	Evolução do factor (adimensional) do coeficiente de expansibilidade térmica na direcção das inclusões, α_{22} , com a relação de forma, RF , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepípedicas (P).	45
4.33	Evolução do factor (adimensional) do coeficiente de condutividade térmica na direcção das inclusões, k_{22} , com a relação de forma, RF , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepípedicas (P).	45

Lista de Tabelas

3.1	Relações de forma para as inclusões do tipo cilíndrico, elipsoidal e paralelepipedico de uma célula representativa unitária de um material compósito com uma fracção volúmica de reforço de 20%.	8
4.1	Propriedades termomecânicas dos materiais da matriz (m) e do reforço (r), para os materiais compósitos de matriz de alumínio reforçados com inclusões de carboneto de silício.	9
4.2	Propriedades térmicas dos materiais da matriz (m) e do reforço (r), para os materiais compósitos de matriz de polietileno de alta densidade reforçado com inclusões de alumina.	10
4.3	Características numéricas das malhas de elementos finitos utilizadas no estudo de convergência, para células representativas unitárias com inclusões do tipo cilíndrico.	14
4.4	Características numéricas das malhas de elementos finitos utilizadas no estudo de convergência, para células representativas unitárias com inclusões do tipo elipsoidal.	15
4.5	Características numéricas das malhas de elementos finitos utilizadas no estudo de convergência, para células representativas unitárias com inclusões do tipo paralelepipedico.	16
4.6	Materiais considerados e respectivas propriedades termomecânicas.	41

Capítulo 1

Introdução

A utilização de materiais compósitos tem vindo a aumentar ao longo dos anos, principalmente em aplicações de engenharia. Estes materiais caracterizam-se por apresentarem heterogeneidades microestruturais que influenciam os valores das suas propriedades termo-mecânicas efectivas. Em geral, estes valores podem ser determinados recorrendo a modelos analíticos ou a simulação numérica. Os modelos analíticos são normalmente associados a materiais compósitos com geometrias simples constituídos por inclusões esféricas ou cilíndricas. No entanto, os materiais compósitos apresentam geralmente geometrias complexas, pelo que é usual recorrer-se à simulação numérica, em particular à modelação por elementos finitos. Neste caso, a consideração de metodologias de homogeneização permite a substituição de um meio heterogéneo por um meio homogéneo equivalente, possibilitando a obtenção de leis de comportamento macroestruturais a partir de informação relativa ao nível microestrutural.

O conceito de homogeneização de propriedades físicas remonta ao início do século XIX [Poisson 1824, Maxwell 1873, Rayleigh 1892]. No entanto, é apenas na segunda metade do século XX que surgem os primeiros trabalhos relativos à teoria matemática da homogeneização [Spagnolo 1968, Sanchez-Palencia 1970, De Giorgi e Spagnolo 1973]. Desde então, distintos tipos de homogeneização têm vindo a ser propostos, de entre os quais se destaca o da homogeneização por expansão assintótica [Bensoussan *et al.* 1978, Sanchez-Palencia 1980]. Esta metodologia permite a determinação das propriedades termoelásticas efectivas e globais de um material compósito a partir do comportamento de um volume representativo na microescala — a célula representativa unitária. Todavia, a consideração de uma célula representativa unitária pressupõe a hipótese de que as heterogeneidades se encontram distribuídas equitativamente no seio da matriz, sendo a morfologia dessas heterogeneidades aproximada pela repetição periódica de uma célula unitária, cuja dimensão característica se revela usualmente bastante inferior às dimensões características do componente estrutural em questão.

Neste contexto, o principal objectivo deste trabalho consiste no estudo da influência da geometria da célula representativa unitária nas propriedades termoelásticas de materiais compósitos, utilizando procedimentos numéricos de homogeneização por expansão assintótica. O estudo é complementado pela análise do efeito das propriedades dos materiais da matriz e do reforço nos resultados numéricos, e a comparação de resultados numéricos com experimentais oriundos de fontes bibliográficas. Para esse efeito:

- Efectuou-se inicialmente a revisão bibliográfica da influência da geometria microestrutural nas propriedades efectivas de materiais compósitos e de resultados experimentais, procedendo-se posteriormente à definição das várias células representativas unitárias a considerar nas análises numéricas;
- Subsequentemente, procedeu-se à geração das células representativas unitárias adoptadas e utilizando *software* já desenvolvido no seio do GRIDS–DiFrACT¹ obtiveram-se resultados numéricos baseados na metodologia da homogeneização por expansão assintótica;
- Por fim, procedeu-se à análise dos resultados numéricos da influência da geometria da célula representativa unitária nos valores das propriedades termoelásticas efectivas de materiais compósitos, bem como à análise do efeito das propriedades dos materiais da matriz e do reforço nos resultados numéricos, e a comparação de resultados numéricos com resultados experimentais oriundos de fontes bibliográficas.

¹Divisão de Fractura e Técnicas Computacionais Avançadas do Grupo de Investigação e Desenvolvimento de *Software* de Simulação.

Capítulo 2

Homogeneização por Expansão Assimptótica em Termoelasticidade

Em geral, a simulação numérica pormenorizada do comportamento termoelástico de materiais compósitos leva à necessidade de um grande esforço computacional. Devido a este facto, o uso de metodologias de homogeneização traduz-se numa grande vantagem. A homogeneização é uma técnica que permite a substituição de um meio heterogéneo por um meio homogéneo equivalente, possibilitando a obtenção de leis que regem o comportamento da macroestrutura a partir de informação relativa à microestrutura. A metodologia de homogeneização por expansão assimptótica consiste numa técnica expedita de abordagem a problemas de modelação de fenómenos físicos em meios com estruturas periódicas. As suas principais vantagens consistem na redução significativa do número graus de liberdade associados à modelação numérica de um problema e no facto de permitir uma caracterização microestrutural do campos termoelásticos.

Neste contexto, e de acordo com o exposto em [Pinho-da-Cruz 2007, Ferreira 2007], considere-se um material heterogéneo linear termoelástico associado a um meio sólido Ω , cuja microestrutura seja constituída pela distribuição espacialmente periódica de uma célula unitária associada a uma região Y . A maioria dos materiais heterogéneos de microestrutura periódica apresentam um valor reduzido para a relação ε entre a microestrutura e a macroestrutura ($\varepsilon \ll 1$), verificando-se, aquando da solicitação termomecânica destes materiais, o aparecimento de oscilações periódicas dos campos resultantes de temperaturas, deslocamentos, fluxos superficiais de calor por condução, tensões e deformações. Estas oscilações devem-se à periodicidade associada à heterogeneidade microestrutural, manifestando-se na vizinhança de dimensão ε de qualquer ponto de Ω . Assim, é natural assumir existência duas escalas distintas \mathbf{x} e \mathbf{y} , que se encontram associadas aos fenómenos relativos à macroescala Ω e à microescala Y , respectivamente. Deste modo, as variáveis associadas aos campos anteriormente referidos passam a depender, em termos funcionais, de ambos os sistemas \mathbf{x} e \mathbf{y} , em que

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon. \quad (2.1)$$

Assim, tem-se uma característica formalmente designada por Y -periodicidade, advinda do facto de a dependência funcional em \mathbf{y} ser periódica no domínio Y . Neste contexto, e relativamente às propriedades lineares termoelásticas, a Y -periodicidade da heterogeneidade

microestrutural resulta no facto de os tensores de condutividade térmica \mathbf{k} , de expansibilidade térmica $\boldsymbol{\alpha}$ e de elasticidade \mathbf{D} serem Y -periódicos em \mathbf{y} , tendo-se

$$k_{ij} = k_{ij}(\mathbf{y}), \quad (2.2)$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\mathbf{y}) \quad \text{e} \quad (2.3)$$

$$D_{ijkl} = D_{ijkl}(\mathbf{y}). \quad (2.4)$$

Pelo contrário, a homogeneidade macroestrutural do material resulta na não-dependência directa destes tensores relativamente ao sistema de coordenadas da macroescala, \mathbf{x} , em que a heterogeneidade microestrutural se manifesta num período ε^{-1} vezes menor que a dimensão característica do domínio Y . Este facto é denotado, de acordo com a equação 2.1, por

$$k_{ij}^\varepsilon(\mathbf{x}) = k_{ij}(\mathbf{x}/\varepsilon), \quad (2.5)$$

$$\alpha_{ij}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \alpha_{ij}(\mathbf{x}/\varepsilon) \quad \text{e} \quad (2.6)$$

$$D_{ijkl}^\varepsilon(\mathbf{x}) = D_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon), \quad (2.7)$$

em que o índice superior ε representa o facto de \mathbf{k} , $\boldsymbol{\alpha}$ e \mathbf{D} serem εY -periódicos no sistema de coordenadas da macroescala, \mathbf{x} , dependendo, assim, indirectamente de \mathbf{x} .

Neste contexto, o problema térmico em regime estacionário é descrito por equações de equilíbrio e de Fourier para a condução de calor que, adoptando a convenção de Einstein para a notação indicial das componentes das grandezas tensoriais, correspondem a [Cioranescu e Donato 1999]

$$\frac{\partial q_i^\varepsilon}{\partial x_i^\varepsilon} - Q = 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad (2.8)$$

$$q_i^\varepsilon = -k_{ij}^\varepsilon \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial x_j^\varepsilon} \quad \text{em } \Omega, \quad (2.9)$$

respectivamente, para $i, j = 1, \dots, 3$. q_i são as componentes do vector de fluxos superficiais de calor por condução, Q representa a taxa temporal de geração de calor por unidade de volume e T é o campo de temperaturas. O índice superior ε evidencia, mais uma vez, a εY -periodicidade de uma determinada variável no sistema de coordenadas da macroescala, \mathbf{x} . A fronteira de Ω é definida pelas superfícies Γ_{D_T} , Γ_{N_T} e Γ_{R_T} , em que se encontram aplicadas condições de fronteira de Dirichlet, de Neumann e de Robin, definidas por

$$T^\varepsilon = \bar{T} \quad \text{em } \Gamma_{D_T}, \quad (2.10)$$

$$q_i^\varepsilon n_i = -\bar{q} \quad \text{em } \Gamma_{N_T} \quad \text{e} \quad (2.11)$$

$$q_i^\varepsilon n_i = h_c(T^\varepsilon - T_\infty) \quad \text{em } \Gamma_{R_T}, \quad (2.12)$$

respectivamente, sendo $\Gamma_{D_T} \cup \Gamma_{N_T} \cup \Gamma_{R_T} = \Gamma$ e $\Gamma_{D_T} \cap \Gamma_{N_T} = \Gamma_{D_T} \cap \Gamma_{R_T} = \Gamma_{N_T} \cap \Gamma_{R_T} = \emptyset$. \bar{T} e \bar{q} correspondem a valores prescritos de temperatura e de fluxo superficial de calor por condução, respectivamente. n_i são as componentes de um versor normal exterior às superfícies Γ_{N_T} ou Γ_{R_T} , sendo h_c e T_∞ o coeficiente de convecção e a temperatura do meio ambiente, respectivamente.

Por outro lado, o problema de termoelasticidade linear é descrito por equações de equilíbrio, relações deformações-deslocamentos linearizadas e relações constitutivas (lei de

Duhamel-Neumann) que, assumindo deformações infinitesimais associadas a um processo quase-estático, correspondem a [Cioranescu e Donato 1999]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j^\varepsilon} + f_i = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (2.13)$$

$$\epsilon_{ij}^\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j^\varepsilon} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i^\varepsilon} \right) \quad \text{em } \Omega \text{ e} \quad (2.14)$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = D_{ijkl}^\varepsilon \epsilon_{kl}^\varepsilon - \Delta T^\varepsilon \beta_{ij}^\varepsilon \quad \text{em } \Omega, \quad (2.15)$$

respectivamente, sendo

$$\Delta T^\varepsilon = T^\varepsilon - T_0 \quad \text{e} \quad (2.16)$$

$$\beta_{ij}^\varepsilon = D_{ijkl}^\varepsilon \alpha_{kl}^\varepsilon = \beta_{ij}^\varepsilon(\mathbf{x}/\varepsilon). \quad (2.17)$$

σ_{ij} e ϵ_{ij} correspondem às componentes dos tensores das tensões e das deformações de Cauchy, respectivamente. f_i e u_i representam as componentes dos vectores de forças volúmicas e de deslocamentos, respectivamente. T_0 é a temperatura de referência e β_{ij} são as componentes do tensor dos módulos térmicos. A fronteira de Ω é definida pelas superfícies Γ_{D_u} e Γ_{N_u} , em que são aplicadas condições de fronteira de Dirichlet e de Neumann, definidas por

$$u_i^\varepsilon = \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_{D_u} \quad \text{e} \quad (2.18)$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon n_j = \bar{t}_i \quad \text{em } \Gamma_{N_u}, \quad (2.19)$$

respectivamente, sendo $\Gamma_{D_u} \cup \Gamma_{N_u} = \Gamma$ e $\Gamma_{D_u} \cap \Gamma_{N_u} = \emptyset$. \bar{u}_i e \bar{t}_i são valores prescritos de deslocamento e de força superficial, respectivamente, sendo n_j as componentes de um versor normal exterior à superfície Γ_{N_u} .

Deste modo, pressupondo a existência de duas escalas distintas associadas aos fenómenos de comportamento do material nos níveis da macroescala Ω e da microescala Y , procede-se à aproximação dos campos de temperaturas e de deslocamentos (variáveis primárias) com base nas respectivas expansões assintóticas em ε :

$$T^\varepsilon(\mathbf{x}) = T^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon T^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 T^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^3 \dots \quad \text{e} \quad (2.20)$$

$$u_i^\varepsilon(\mathbf{x}) = u_i^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon u_i^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 u_i^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^3 \dots, \quad (2.21)$$

sendo os termos $T^{(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e $u_i^{(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, com $r \in \mathbb{N}_0$, funções Y -periódicas em \mathbf{y} , designadas por correctores de ordem r dos campos de temperaturas e de deslocamentos, respectivamente. Atendendo à equação 2.1 tem-se, de acordo com a regra da cadeia utilizada na derivação de funções, que

$$\frac{\partial \cdot}{\partial x_i^\varepsilon} = \frac{\partial \cdot}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \cdot}{\partial y_i}. \quad (2.22)$$

Assim, a substituição das expansões assintóticas quer do campo de temperaturas (equação 2.20) nas equações de Fourier para a condução de calor (expressão 2.9) e na lei de Duhamel-Neumann (expressão 2.15) quer do campo de deslocamentos (expressão 2.21) nas relações deformações-deslocamentos linearizadas (expressão 2.14) permite a obtenção

do problema termoelástico homogeneizado. Deste modo, o campo de temperaturas $T^{(0)}$ corresponde à solução do problema térmico homogeneizado definido por

$$\frac{\partial \Xi_i}{\partial x_i} - Q = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (2.23)$$

$$T^{(0)} = \bar{T} \quad \text{em } \Gamma_{D_T}, \quad (2.24)$$

$$\Xi_i n_i = -\bar{q} \quad \text{em } \Gamma_{N_T}, \quad (2.25)$$

$$\Xi_i n_i = h_c \left(T^{(0)} - T_\infty \right) \quad \text{em } \Gamma_{R_T}, \quad \text{com} \quad (2.26)$$

$$\Xi_i = -k_{ij}^h \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x_j} \quad \text{em } \Omega, \quad (2.27)$$

sendo Ξ_i as componentes do campo macroestrutural homogeneizado de fluxos superficiais de calor por condução e k_{ij}^h as componentes do tensor homogeneizado de condutividade térmica. Estas últimas são definidas por

$$k_{ik}^h = \frac{1}{|Y|} \int_Y k_{ij}(\mathbf{y}) \left(I_j^k - \frac{\partial \Upsilon^k}{\partial y_j} \right) dY, \quad (2.28)$$

em que I_j^k correspondem, num referencial cartesiano ortonormado, às componentes do tensor identidade de segunda ordem e Υ^k são as componentes do vector do campo de deslocamentos termocaracterísticos [Pinho-da-Cruz 2007]. Por outro lado, o campo de deslocamentos $u_i^{(0)}$ corresponde à solução do problema de termoelasticidade homogeneizado definido por

$$\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (2.29)$$

$$u_i^{(0)} = \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_{D_u}, \quad (2.30)$$

$$\Sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{em } \Gamma_{N_u}, \quad \text{com} \quad (2.31)$$

$$\Sigma_{ij} = D_{ijkl}^h \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_l} - \left(T^{(0)} - T_0 \right) \beta_{ij}^h \quad \text{em } \Omega, \quad (2.32)$$

sendo Σ_{ij} as componentes do campo macroestrutural homogeneizado de tensões. D_{ijkl}^h e β_{ij}^h correspondem às componentes dos tensores homogeneizados de elasticidade e dos módulos térmicos, respectivamente, definidos por

$$D_{ijmn}^h = \frac{1}{|Y|} \int_Y D_{ijkl}(\mathbf{y}) \left(I_{kl}^{mn} - \frac{\partial \chi_k^{mn}}{\partial y_l} \right) dY \quad \text{e} \quad (2.33)$$

$$\beta_{ij}^h = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left[\beta_{ij}(\mathbf{y}) - D_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial \Psi_k}{\partial y_l} \right] dY, \quad (2.34)$$

sendo $I_{kl}^{mn} = \delta_{km} \delta_{ln}$, em que δ_{ij} é o símbolo de delta de Kronecker. χ_k^{mn} e Ψ_k são as componentes dos tensores dos campos de deslocamentos característicos e dos coeficientes característicos de dilatação linear efectiva, respectivamente [Pinho-da-Cruz 2007].

Capítulo 3

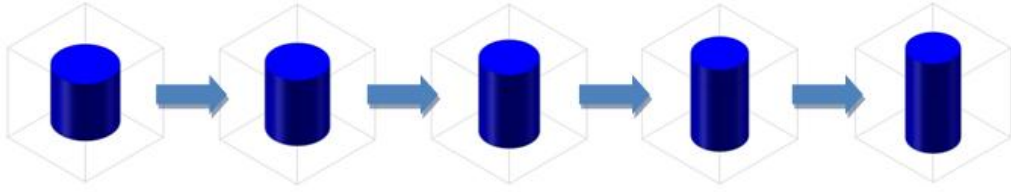
Procedimentos Numéricos

Com o intuito de se estudar a influência da geometria da célula representativa unitária nas propriedades termoelásticas de materiais compósitos, utilizou-se o programa COMMA3D [Pinho-da-Cruz 2007]. Este consiste num programa de simulação numérica baseado no método dos elementos finitos e foi desenvolvido em Fortran 90, constituindo a base de uma plataforma de modelação numérica do comportamento termomecânico de materiais compósitos. Em particular, o programa COMMA3D inclui o procedimento de homogeneização por expansão assintótica em termoelasticidade linear.

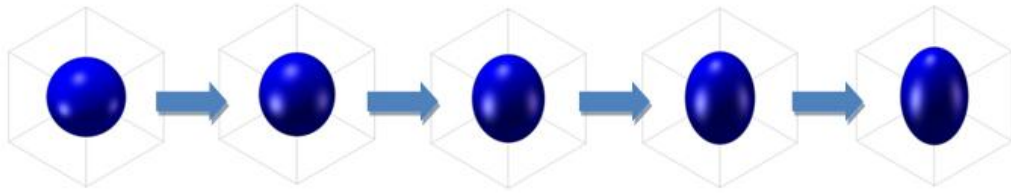
As tarefas de pré- e pós-processamento foram realizadas utilizando o programa GiD[®], que corresponde a uma interface gráfica de modelação geométrica, com várias características úteis para as fases de pré- e pós-processamento de problemas de simulação numérica.

Na realização deste estudo optou-se por analisar materiais compósitos constituídos por células representativas unitárias reforçadas com 3 diferentes tipos de inclusão: cilindro, elipsóide e paralelepípedo. Considerou-se uma fracção volúmica de reforço de 20%, tendo sido definidos, para cada tipo de inclusão, 5 valores para a relação de forma. Na figura 3.1 ilustra-se esquematicamente a evolução da relação de forma das células representativas unitárias, para as inclusões do tipo cilíndrico, elipsoidal e paralelepipedico, sendo os valores considerados para a relação de forma dos 3 tipos distintos de inclusão de reforço da célula representativa unitária apresentados na tabela 3.1, em que ϕ_C e ϕ_E são os diâmetros do cilindro e do elipsóide (de secção circular), respectivamente, h é a altura de uma inclusão e L é a largura do paralelepípedo (de secção quadrada). Atenda-se ao facto de que a última relação de forma dar origem a compósitos de fibras contínuas no caso das inclusões cilíndrica e paralelepipedica. Além disso, note-se que as restantes células representativas unitárias definem compósitos de fibras descontínuas unidireccionais, pelo que no presente trabalho se abordará a influência da forma, mas não da orientação, das diversas inclusões.

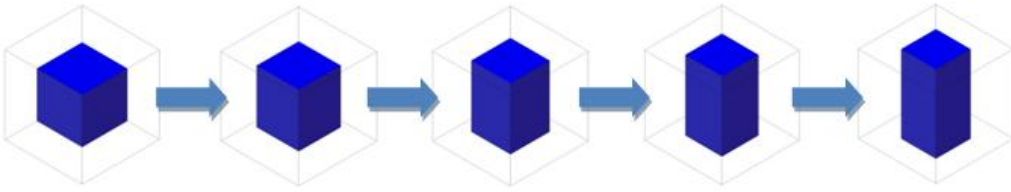
A aplicação do método de homogeneização por expansão assintótica exige a consideração de uma célula representativa unitária para a definição de uma microestrutura periódica ilimitada. Assim, esta periodicidade dever-se-á reflectir não só ao nível da geometria da célula representativa unitária mas também dos campos dos deslocamentos característicos χ e dos coeficientes característicos de dilatação linear efectiva Ψ , no problema termomecânico, e do campo dos deslocamentos termocaracterísticos Υ , no problema térmico. Deste modo, utilizou-se a sub-rotina SLAVERY [Oliveira *et al.* 2004, Oliveira 2006] para se proceder expeditamente à associação dos nós da superfície da célula representativa unitária — sujeitos a condições de periodicidade —, bem como dos seus correspondentes graus de liberdade.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.1: Ilustração esquemática da evolução da relação de forma de células representativas unitárias, para inclusões do tipo (a) cilíndrico, (b) elipsoidal e (c) paralelepipedico.

Tabela 3.1: Relações de forma para as inclusões do tipo cilíndrico, elipsoidal e paralelepipedico de uma célula representativa unitária de um material compósito com uma fracção volúmica de reforço de 20%.

Relação de forma (RF)	Cilindro (h/ϕ_C)	Elipsóide (h/ϕ_E)	Paralelepípedo (h/L)
1	1,00	1,00	1,00
2	1,22	1,15	1,28
3	1,46	1,30	1,58
4	1,72	1,45	1,90
5	1,98	1,62	2,24

Capítulo 4

Apresentação e Discussão de Resultados

4.1 Análise da Influência da Geometria da Célula Representativa Unitária

4.1.1 Definição das Células Representativas Unitárias

No presente trabalho consideram-se materiais compósitos reforçados com três tipos distintos de inclusão: (i) inclusão cilíndrica (C), (ii) inclusão elipsoidal (E) e (iii) inclusão paralelepipedica (P). No que concerne as propriedades elásticas e termoelásticas dos materiais que constituem os materiais compósitos, consideram-se o alumínio (Al) para a matriz e o carboneto de silício (SiC) para o reforço, encontrando-se as suas propriedades termomecânicas indicadas na tabela 4.1 [Chawla *et al.* 2003].

Tabela 4.1: Propriedades termomecânicas dos materiais da matriz (m) e do reforço (r), para os materiais compósitos de matriz de alumínio reforçados com inclusões de carboneto de silício.

Propriedade	Valor
Módulo de elasticidade do material da matriz, E_m [GPa]	70
Coefficiente de Poisson do material da matriz, ν_m [-]	0,33
Coefficiente de expansibilidade térmica do material da matriz, α_m [MK ⁻¹]	22,0
Módulo de elasticidade do material do reforço, E_r [GPa]	400
Coefficiente de Poisson do material do reforço, ν_r [-]	0,19
Coefficiente de expansibilidade térmica do material do reforço, α_r [MK ⁻¹]	4,3

Em relação às propriedades térmicas dos materiais que constituem os materiais compósitos, consideram-se o polietileno de alta densidade (HDPE) para a matriz e a alumina (Al₂O₃) para o reforço, encontrando-se as suas propriedades térmicas indicadas na tabela 4.2 [Tavman 2004].

Tal como se referiu anteriormente, foram considerados materiais compósitos com uma fracção volumica de reforço de 20%, tendo sido definidos, para cada um dos 3 tipos de

Tabela 4.2: Propriedades térmicas dos materiais da matriz (m) e do reforço (r), para os materiais compósitos de matriz de polietileno de alta densidade reforçado com inclusões de alumina.

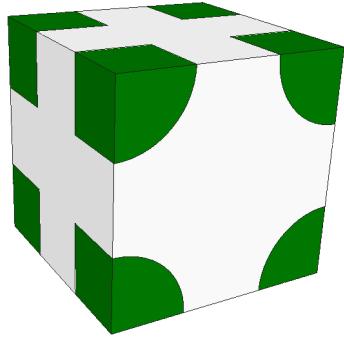
Propriedade	Valor
Coefficiente de condutividade térmica do material da matriz, k_m [Wm ⁻¹ K ⁻¹]	0,545
Coefficiente de condutividade térmica do material do reforço, k_r [Wm ⁻¹ K ⁻¹]	31

inclusão, 5 valores para a relação de forma, encontrando-se os seus valores apresentados na tabela 3.1, em que ϕ_C e ϕ_E são os diâmetros do cilindro e do elipsóide (de secção circular), respectivamente, h é a altura de uma inclusão e L é a largura do paralelepípedo (de secção quadrada). As geometrias das células representativas unitárias com inclusões dos tipos cilíndrico, elipsoidal e paralelepipedico encontram-se ilustradas, para as correspondentes relações de forma, nas figuras 4.1, 4.2 e 4.3, respectivamente. Com base nestas geometrias, efectua-se várias simulações numéricas utilizando elementos finitos tetraédricos lineares correspondentes a estudos de convergência [Rizzo 1991] das matrizes homogeneizadas de elasticidade, \mathbf{D}^h , das matrizes homogeneizadas de condutividade térmica, \mathbf{k}^h , e dos vectores homogeneizados dos módulos térmicos, $\boldsymbol{\beta}^h$.

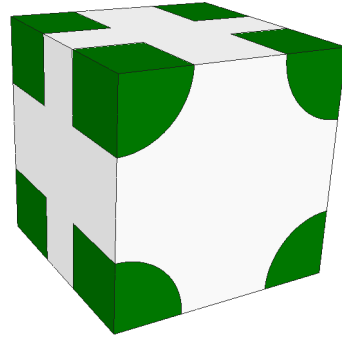
4.1.2 Estudos de Convergência e Resultados Numéricos de Elasticidade

No estudo de convergência consideram-se, para os 3 tipos de inclusão, 5 malhas distintas, cujas características são apresentadas, para as inclusões dos tipos cilíndrico, elipsoidal e paralelepipedico, nas tabelas 4.3, 4.4 e 4.5, respectivamente.

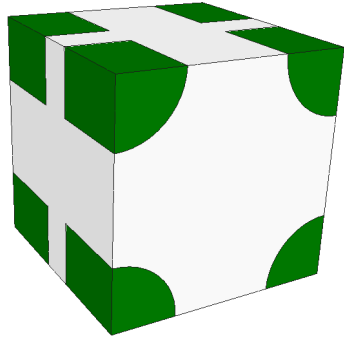
Em termos das matrizes homogeneizadas de elasticidade, \mathbf{D}^h , nos estudos de convergência efectuados para os vários tipos de inclusão verificou-se a convergência simultânea das componentes de cada matriz \mathbf{D}^h . Deste modo, procede-se, com o intuito de simplificar a exposição dos resultados obtidos, à análise destes resultados considerando a evolução da norma de Frobenius da matriz \mathbf{D}^h , $\|\mathbf{D}^h\|$, com o número de graus de liberdade, n_{gl} . Refira-se que a convergência da norma de Frobenius de uma matriz não é condição suficiente, embora seja necessária, para a convergência simultânea de todas as componentes da matriz. Na figura 4.4 apresentam-se os resultados obtidos nos estudos de convergência com as células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepipedicas (P) de carboneto de silício. Por um lado, verifica-se que a evolução da norma de \mathbf{D}^h com o número de graus de liberdade n_{gl} , para os vários tipos de inclusão considerados não apresenta características de instabilidade numérica, tais como, por exemplo, fenómenos de oscilação numérica ou de divergência numérica. Por outro lado, verifica-se que os resultados numéricos se aproximam razoavelmente do limite de convergência para um número reduzido de graus de liberdade ($n_{gl} \simeq 25000$). Verifica-se ainda que, para os diferentes tipos de inclusão, a norma de \mathbf{D}^h aumenta com RF . Por outro lado, constata-se que os valores estabilizados da norma de \mathbf{D}^h associados à inclusão paralelepipedica são superiores aos associados à inclusão cilíndrica, que, por sua vez, são superiores aos associados à inclusão elipsoidal. Por fim, refira-se que os valores máximos da norma de \mathbf{D}^h correspondem às relações de forma RF5 associadas aos compósitos de fibras contínuas, para as inclusões paralelepipedica e cilíndrica.



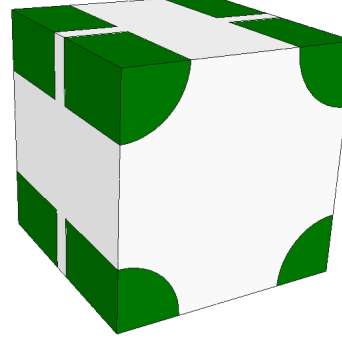
(a)



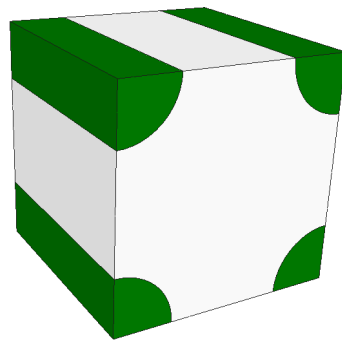
(b)



(c)

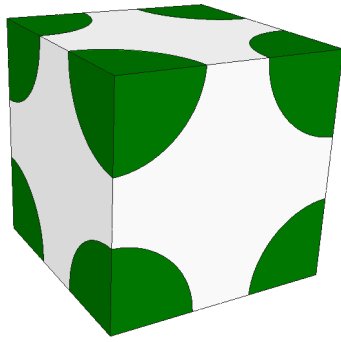


(d)

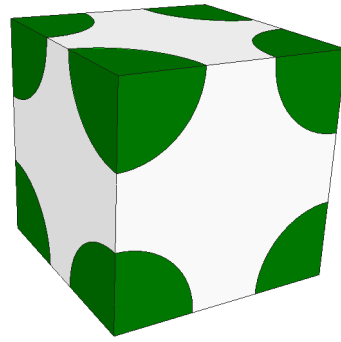


(e)

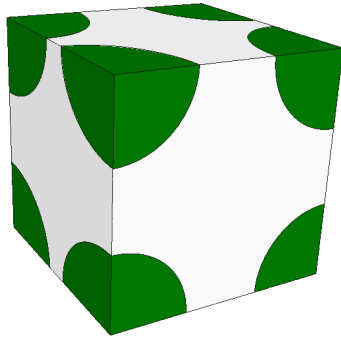
Figura 4.1: Geometrias das células representativas unitárias com inclusões do tipo cilíndrico, para as relações de forma (a) RF1, (b) RF2, (c) RF3, (d) RF4 e (e) RF5.



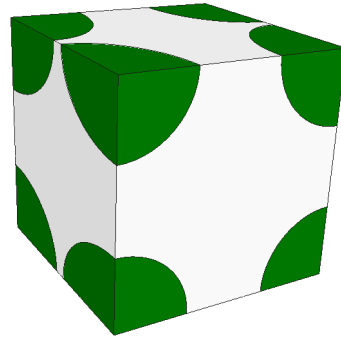
(a)



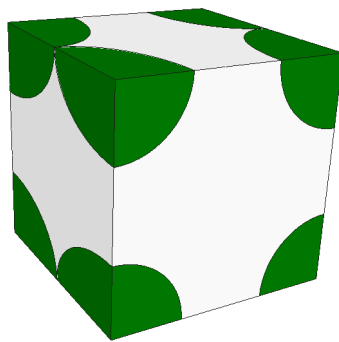
(b)



(c)

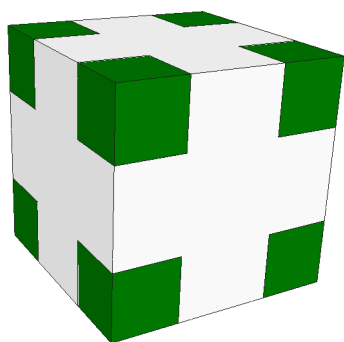


(d)

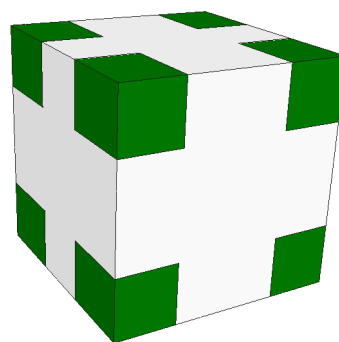


(e)

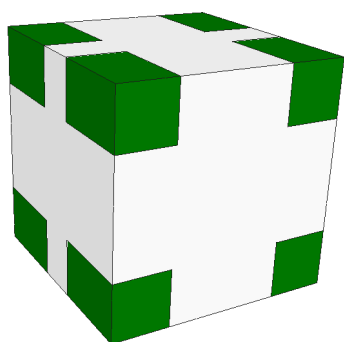
Figura 4.2: Geometrias das células representativas unitárias com inclusões do tipo elipsoi-
dal, para as relações de forma (a) RF1, (b) RF2, (c) RF3, (d) RF4 e (e) RF5.



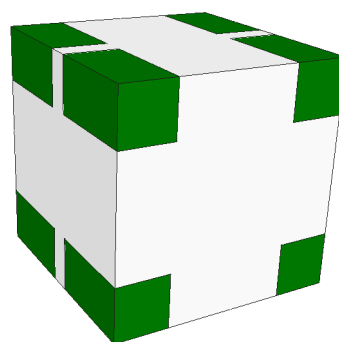
(a)



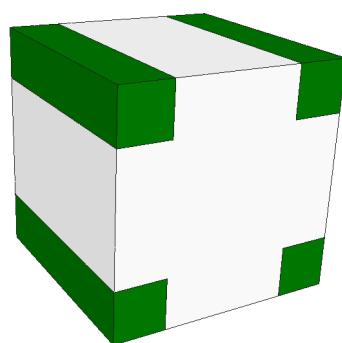
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 4.3: Geometrias das células representativas unitárias com inclusões do tipo paralelepípedo, para as relações de forma (a) RF1, (b) RF2, (c) RF3, (d) RF4 e (e) RF5.

Tabela 4.3: Características numéricas das malhas de elementos finitos utilizadas no estudo de convergência, para células representativas unitárias com inclusões do tipo cilíndrico.

Relação de forma (RF)	Referência da malha	Número de nós	Número de elementos
1	C-RF1-1	1008	3988
	C-RF1-2	1998	9746
	C-RF1-3	3903	19366
	C-RF1-4	7984	41189
	C-RF1-5	16063	85459
2	C-RF2-1	1057	4159
	C-RF2-2	2021	9749
	C-RF2-3	3921	19764
	C-RF2-4	7945	40935
	C-RF2-5	15959	84737
3	C-RF3-1	1159	4930
	C-RF3-2	1985	9263
	C-RF3-3	3867	19259
	C-RF3-4	7877	40831
	C-RF3-5	15711	83839
4	C-RF4-1	1123	4930
	C-RF4-2	1831	9263
	C-RF4-3	3870	19259
	C-RF4-4	7827	40831
	C-RF4-5	15833	84332
5	C-RF5-1	1134	4885
	C-RF5-2	1944	9246
	C-RF5-3	3955	19752
	C-RF5-4	7823	40368
	C-RF5-5	15731	83420

Tabela 4.4: Características numéricas das malhas de elementos finitos utilizadas no estudo de convergência, para células representativas unitárias com inclusões do tipo elipsoidal.

Relação de forma (RF)	Referência da malha	Número de nós	Número de elementos
1	E-RF1-1	1218	4889
	E-RF1-2	2005	9000
	E-RF1-3	3626	17382
	E-RF1-4	8451	42515
	E-RF1-5	16191	84506
2	E-RF2-1	1203	5027
	E-RF2-2	2144	9794
	E-RF2-3	4060	19287
	E-RF2-4	8408	42458
	E-RF2-5	16620	87192
3	E-RF3-1	1082	4523
	E-RF3-2	2028	9260
	E-RF3-3	4078	19411
	E-RF3-4	8371	42335
	E-RF3-5	16846	88121
4	E-RF4-1	1108	4679
	E-RF4-2	2020	9343
	E-RF4-3	4093	19660
	E-RF4-4	8281	41907
	E-RF4-5	16819	87786
5	E-RF5-1	1077	4556
	E-RF5-2	1968	9119
	E-RF5-3	4041	19736
	E-RF5-4	8485	42832
	E-RF5-5	16870	88258

Tabela 4.5: Características numéricas das malhas de elementos finitos utilizadas no estudo de convergência, para células representativas unitárias com inclusões do tipo paralelepípedo.

Relação de forma (RF)	Referência da malha	Número de nós	Número de elementos
1	P-RF1-1	1005	4770
	P-RF1-2	1953	9649
	P-RF1-3	4187	21426
	P-RF1-4	8360	44043
	P-RF1-5	16319	87896
2	P-RF2-1	1103	5241
	P-RF2-2	1983	9818
	P-RF2-3	4097	21050
	P-RF2-4	8127	42724
	P-RF2-5	16451	88514
3	P-RF3-1	1089	5148
	P-RF3-2	2087	10274
	P-RF3-3	4100	21081
	P-RF3-4	8558	44997
	P-RF3-5	16305	87709
4	P-RF4-1	1033	4712
	P-RF4-2	1924	9565
	P-RF4-3	4128	21074
	P-RF4-4	8134	42888
	P-RF4-5	16238	87739
5	P-RF5-1	1030	4748
	P-RF5-2	1937	9520
	P-RF5-3	4161	21273
	P-RF5-4	8555	44958
	P-RF5-5	16440	88430

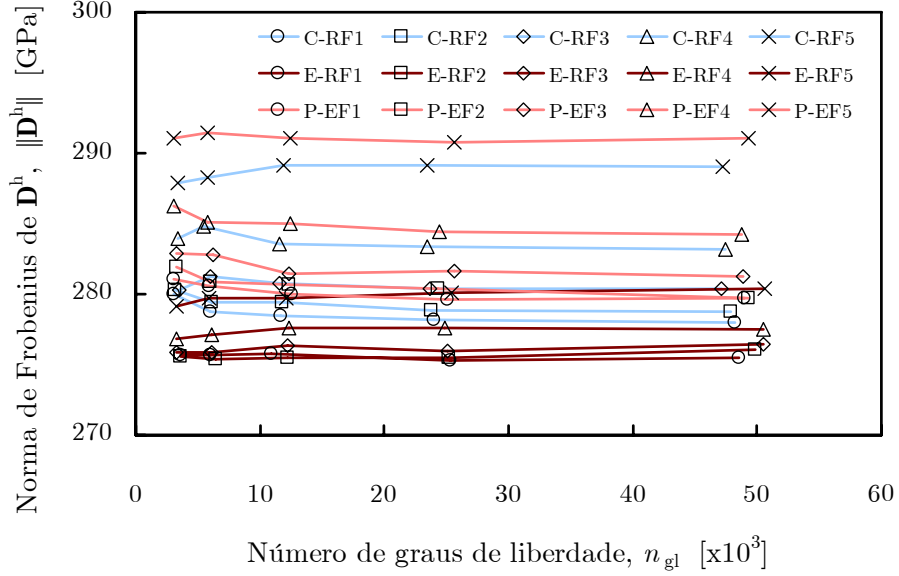


Figura 4.4: Evolução da norma de Frobenius de \mathbf{D}^h com o número de graus de liberdade, n_{gl} , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepipedicas (P) de carboneto de silício.

Na figura 4.5 ilustra-se a evolução da variação relativa da norma de Frobenius de \mathbf{D}^h com o número de graus de liberdade, n_{gl} , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com os diferentes tipos de inclusão. Verifica-se que as malhas utilizadas dão origem, mesmo para malhas de elementos finitos grosseiras, a aproximações com variações relativas sempre inferiores, em valor absoluto, a 0,5%. Assim, embora as 15 malhas de elementos finitos utilizadas pudessem ser consideradas como estando associadas a soluções admissíveis [Rizzo 1991], foram seleccionadas as malhas de elementos finitos referentes, para cada uma das relações de forma dos diferentes tipos de inclusão, ao quarto nível de refinamento (ver tabelas 4.3 a 4.5). Neste caso têm-se as menores variações relativas da norma de \mathbf{D}^h , que são inferiores, em valor absoluto, a 0,22%. Neste contexto, nas figuras 4.6, 4.7 e 4.8 encontram-se ilustradas as malhas de elementos finitos adoptadas para as células representativas unitárias com os diferentes tipo de inclusão. Com base nas malhas de elementos finitos adoptadas foram obtidas as matrizes homogeneizadas de elasticidade, \mathbf{D}^h , para as várias relações de forma, RF , das células representativas unitárias com inclusões do tipo cilíndrico, elipsoidal e paralelepipedico. A título de exemplo, são apresentadas na figura 4.9 as componentes das matrizes constitutivas, \mathbf{D}^h , obtidas para a relação de forma RF3 das células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas, elipsoidais e paralelepipedicas de carboneto de silício. Em termos das matrizes homogeneizadas de elasticidade, \mathbf{D}^h , as simulações numéricas revelam que estas são características de um material tetragonal [Banks-Sills *et al.* 1997], que corresponde a

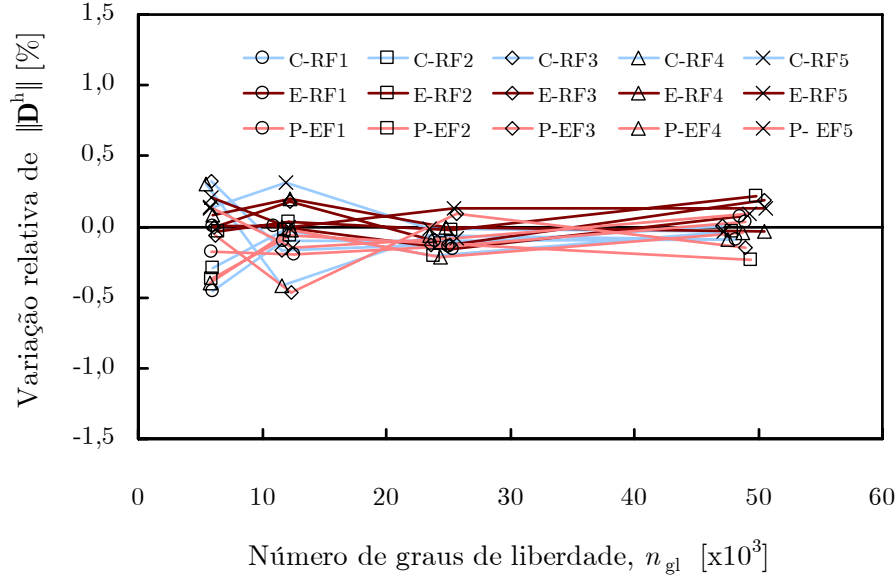
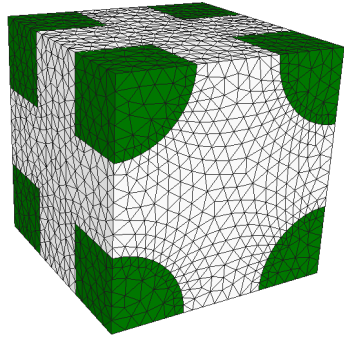


Figura 4.5: Evolução da variação relativa da norma de Frobenius de \mathbf{D}^h com o número de graus de liberdade, n_{gl} , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepipedicas (P) de carboneto de silício.

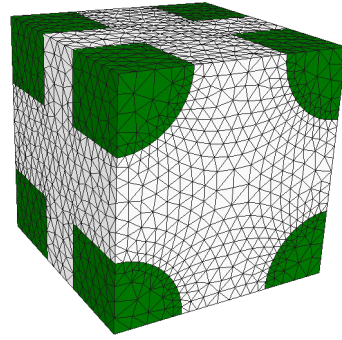
um caso particular de ortotropia definido pela matriz homogeneizada de elasticidade

$$\mathbf{D}^h = \begin{bmatrix} D_{11}^h & D_{12}^h & D_{23}^h & 0 & 0 & 0 \\ D_{12}^h & D_{22}^h & D_{12}^h & 0 & 0 & 0 \\ D_{23}^h & D_{12}^h & D_{11}^h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44}^h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{44}^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55}^h \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

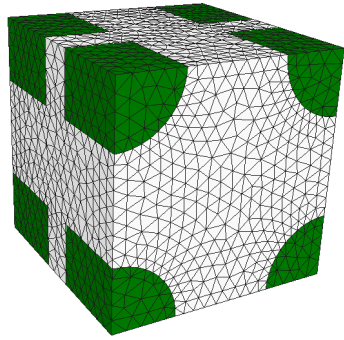
e se encontra em conformidade com o facto de as várias células representativas unitárias apresentarem três planos mutuamente ortogonais de simetria material — x_1Ox_2 , x_2Ox_3 e x_1Ox_3 . Todavia, refira-se que, tal como seria de esperar, por uma questão de simetria constatou-se que as matrizes homogeneizadas de elasticidade, \mathbf{D}^h , associadas às relações de forma RF1 das células representativas unitárias associadas às inclusões elipsoidal e paralelepipedica, que neste caso degeneram em inclusões esférica e cúbica, respectivamente, se revelam características de um material cúbico. Um material cúbico caracteriza-se pelo facto de apresentar as mesmas propriedades mecânicas segundo as três direcções de ortotropia, sendo assim a sua matriz constitutiva definida apenas por 3 parâmetros independentes: E , ν e G [Pinho-da-Cruz 2007]. No entanto, à excepção destes dois casos, a tetragonalidade da natureza das matrizes homogeneizadas de elasticidade, \mathbf{D}^h , foi verificada para as restantes situações. Neste contexto, a inversão da matriz (não-singular) de elasticidade, \mathbf{D}^h ,



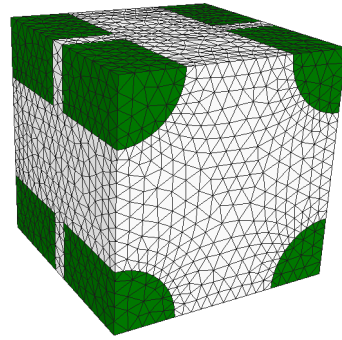
(a)



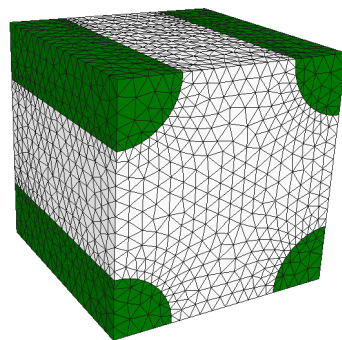
(b)



(c)

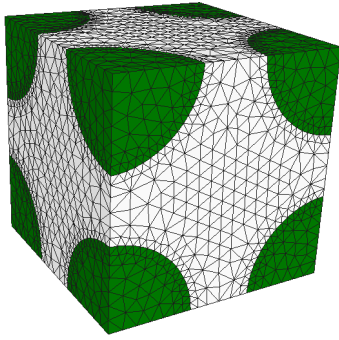


(d)

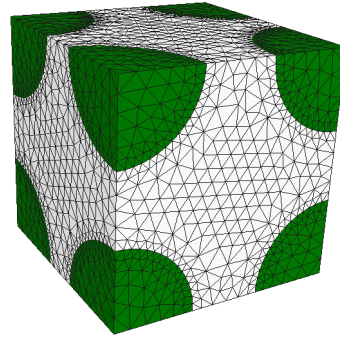


(e)

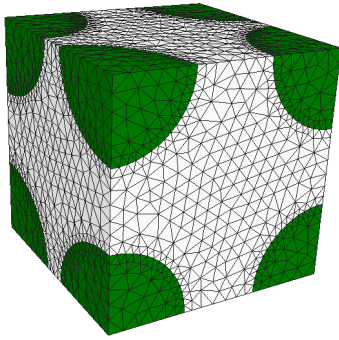
Figura 4.6: Malhas de elementos finitos das células representativas unitárias com inclusões do tipo cilíndrico, para as relações de forma (a) RF1, (b) RF2, (c) RF3, (d) RF4 e (e) RF5.



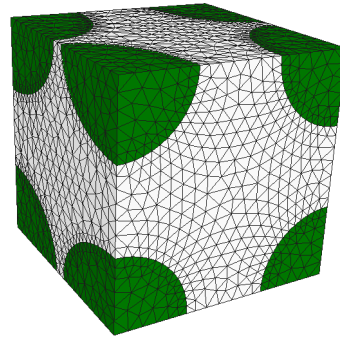
(a)



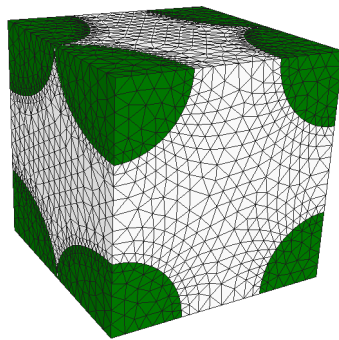
(b)



(c)

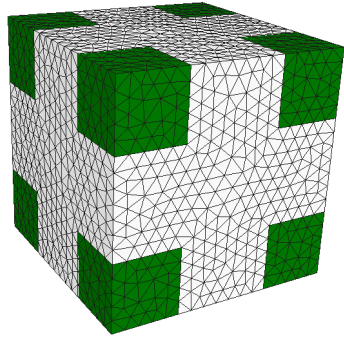


(d)

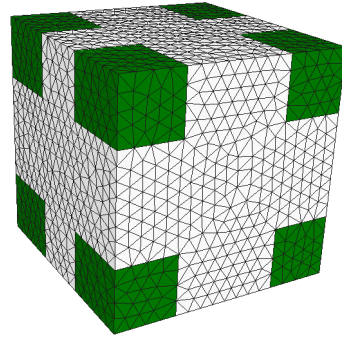


(e)

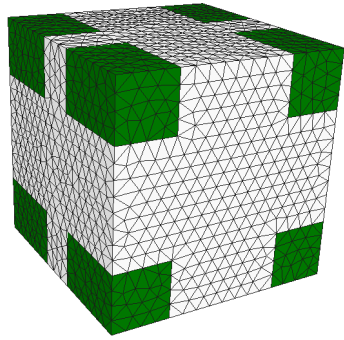
Figura 4.7: Malhas de elementos finitos das células representativas unitárias com inclusões do tipo elipsoidal, para as relações de forma (a) RF1, (b) RF2, (c) RF3, (d) RF4 e (e) RF5.



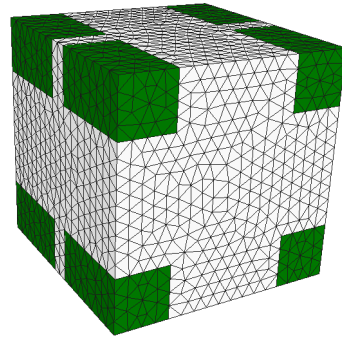
(a)



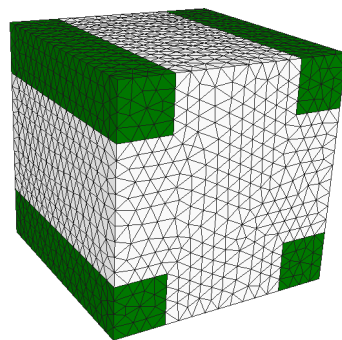
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 4.8: Malhas de elementos finitos das células representativas unitárias com inclusões do tipo paralelepípedo, para as relações de forma (a) RF1, (b) RF2, (c) RF3, (d) RF4 e (e) RF5.

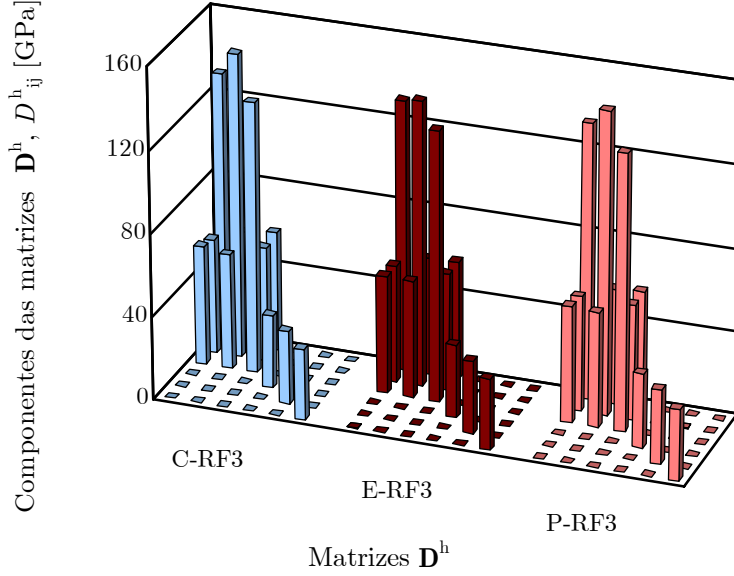


Figura 4.9: Componentes das matrizes constitutivas, \mathbf{D}^h , obtidas para células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepípedicas (P) de carboneto de silício (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%).

resulta na matriz homogeneizada de flexibilidade

$$\mathbf{S}^h = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & \frac{-\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{-\nu_{13}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & \frac{-\nu_{12}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_{11}} & \frac{-\nu_{12}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

em que E_{11} e E_{22} são os módulos de elasticidade longitudinal na direcção transversal às inclusões e na direcção das inclusões, respectivamente. G_{12} , ν_{12} , G_{13} e ν_{13} são o módulo de corte (*i.e.* de elasticidade transversal) e o coeficiente de Poisson associados às direcções 1 e 2, e 1 e 3, respectivamente. Atenda-se ao facto de que para o material tetragonal considerado se tem que $E_{33} = E_{11}$, $G_{23} = G_{12}$ e $\nu_{23} = \nu_{12}$, sendo o material caracterizado por apenas 6 propriedades independentes: E_{11} , E_{22} , G_{12} , G_{13} , ν_{12} e ν_{13} . Refira-se ainda que, atendendo ao facto de estas propriedades corresponderem, em termos macroscópicos, a valores homogeneizados, os seus índices superiores h foram omitidos, sem perda de generalidade, por uma questão de simplificação.

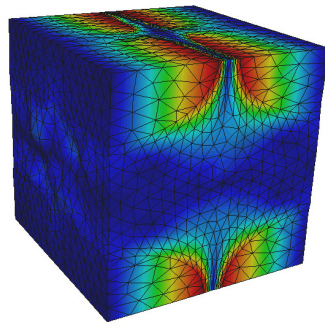
Como foi anteriormente referido, no contexto do método da homogeneização por expansão assintótica, as propriedades elásticas homogeneizadas são obtidas recorrendo ao campo de deslocamentos característicos χ (ver equação 2.33). Nas figuras 4.10, 4.11 e 4.12 estão representados os 6 modos próprios de deformação χ_{kl} , associados aos deslocamentos

característicos obtidos para a relação de forma RF3 das células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com inclusões, respectivamente, cilíndricas, elipsoidais e paralelepípedicas de carboneto de silício. A periodicidade na microescala — Y-periodicidade — dos deslocamentos característicos para a relação de forma RF3 das células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas, elipsoidais e paralelepípedicas de carboneto de silício é ilustrada, para o caso particular do modo de corte χ_{13} , na figura 4.13, para 8 células representativas unitárias.

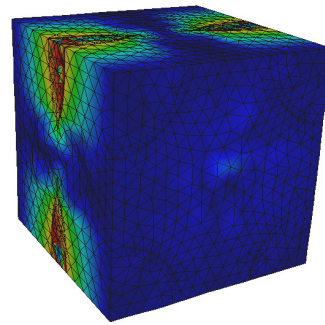
4.1.3 Análise de Resultados Numéricos de Termoelasticidade

Em termos dos vectores homogeneizados dos módulos térmicos, β^h , nos estudos de convergência efectuados para os vários tipos de inclusão também se verificou a convergência simultânea das componentes de cada vector β^h . Assim, analogamente ao que foi efectuado no estudo de convergência das matrizes \mathbf{D}^h , analisam-se os resultados considerando a evolução da norma euclidiana do vector β^h , $\|\beta^h\|$, com o número de graus de liberdade, n_{gl} . Na figura 4.14 apresentam-se os resultados obtidos nos estudos de convergência com células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepípedicas (P) de carboneto de silício. Por um lado, verifica-se que a evolução da norma de β^h com o número de graus de liberdade, n_{gl} , para os vários tipos de inclusão considerados não apresenta características de instabilidade numérica. Por outro lado, verifica-se que, para as inclusões do tipo cilíndrico e elipsoidal, os resultados numéricos se vão aproximando progressivamente, por valores superiores, do limite de convergência, enquanto que, para a inclusão do tipo paralelepípedo, o valor da norma se mantém invariante, tendo sido atingido o limite de convergência para um número muito reduzido de graus de liberdade ($n_{gl} \simeq 3000$). Por outro lado, constata-se que os valores estabilizados da norma de β^h associados à inclusão paralelepípedica são inferiores aos associados à inclusão cilíndrica, que, por sua vez, são inferiores aos associados à inclusão elipsoidal.

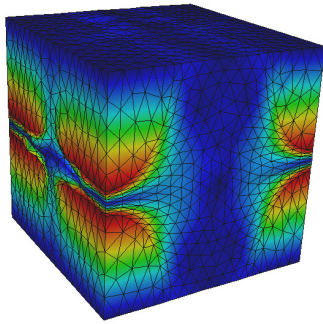
Na figura 4.15 ilustra-se a evolução da variação relativa da norma euclidiana de β^h com o número de graus de liberdade, n_{gl} , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com os diferentes tipos de inclusão. Verifica-se que as malhas utilizadas dão origem, mesmo para malhas de elementos finitos grosseiras, a aproximações com variações relativas sempre inferiores, em valor absoluto, a 0,2%. Assim, as malhas de elementos finitos adoptadas no estudo de convergência das matrizes \mathbf{D}^h revelam-se adequadas correspondendo, neste caso, a variações relativas da norma de β^h inferiores, em valor absoluto, a 0,06%. Com base nas referidas malhas de elementos finitos adoptadas foram obtidos os vectores homogeneizados dos módulos térmicos β^h , para as várias relações de forma, RF , das células representativas unitárias com inclusões do tipo cilíndrico, elipsoidal e paralelepípedo. Analogamente ao efectuado no caso do estudo de convergência das matrizes \mathbf{D}^h , na figura 4.16 são apresentadas as componentes dos vectores homogeneizados dos módulos térmicos, β^h , obtidas para a relação de forma RF3 das células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas, elipsoidais e paralelepípedicas de carboneto de silício. Assim, constata-se que os vectores β^h obtidos para a relação de forma RF3 de células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com diferentes tipos de inclusão de carboneto de silício são praticamente idênticos.



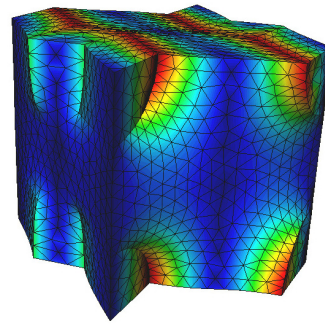
(a)



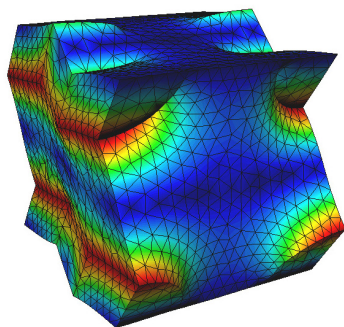
(b)



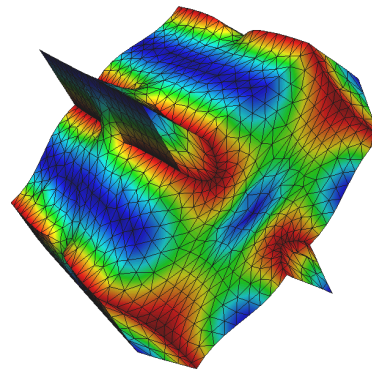
(c)



(d)

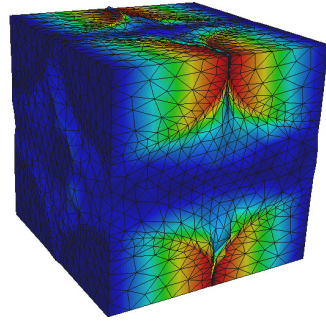


(e)

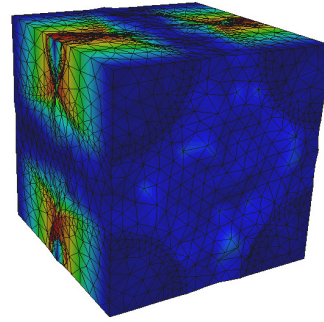


(f)

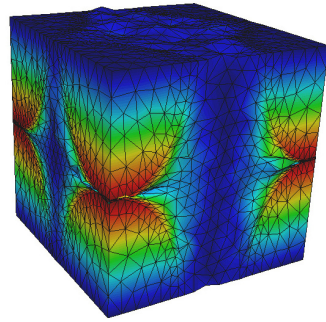
Figura 4.10: Deslocamentos característicos da célula representativa unitária de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas de carboneto de silício (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%) — modos normais (a) χ_{11} , (b) χ_{22} e (c) χ_{33} , e modos de corte (d) χ_{12} , (e) χ_{23} e (f) χ_{13} .



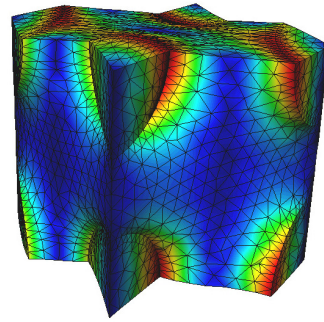
(a)



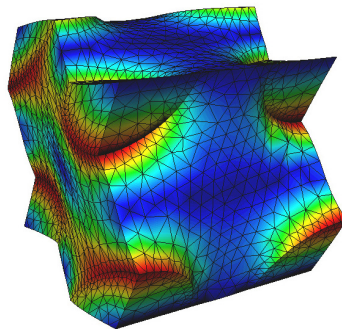
(b)



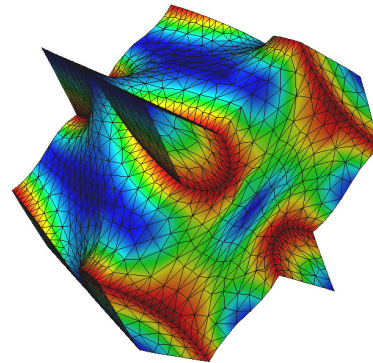
(c)



(d)

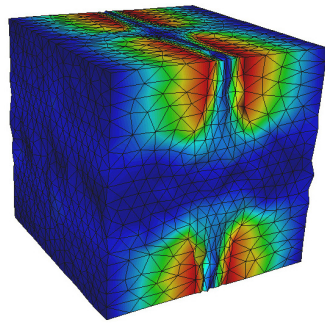


(e)

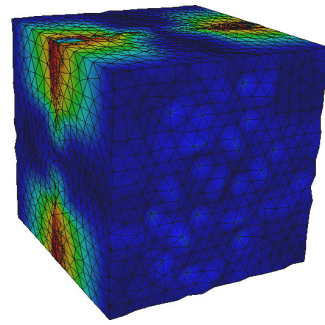


(f)

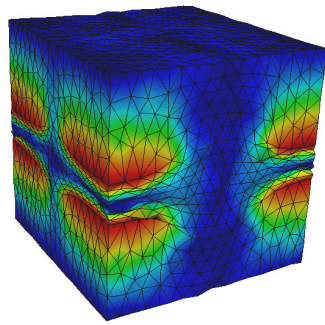
Figura 4.11: Deslocamentos característicos da célula representativa unitária de material compósito de alumínio reforçado com inclusões elipsoidais de carboneto de silício (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%) — modos normais (a) χ_{11} , (b) χ_{22} e (c) χ_{33} , e modos de corte (d) χ_{12} , (e) χ_{23} e (f) χ_{13} .



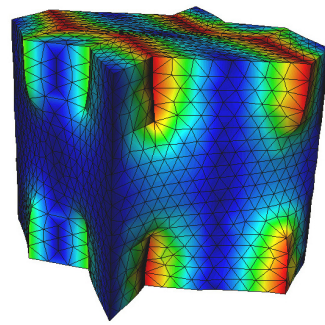
(a)



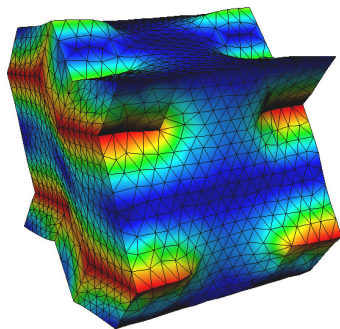
(b)



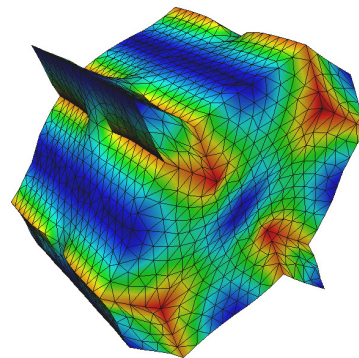
(c)



(d)

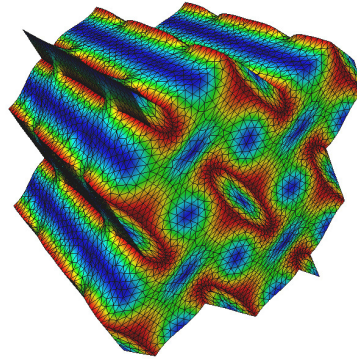


(e)

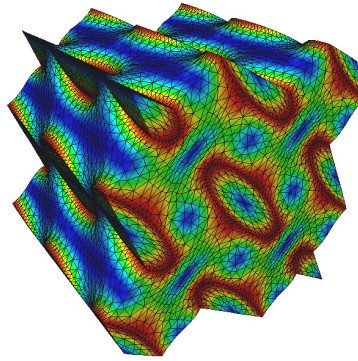


(f)

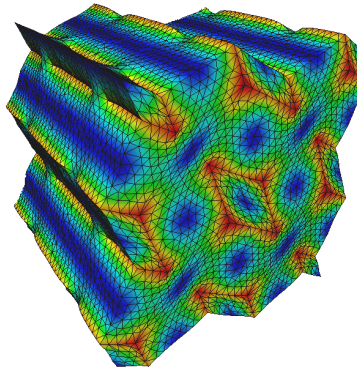
Figura 4.12: Deslocamentos característicos da célula representativa unitária de material compósito de alumínio reforçado com inclusões paralelepípedicas de carboneto de silício (relação de forma RF3 e fração volúmica de 20%) — modos normais (a) χ_{11} , (b) χ_{22} e (c) χ_{33} , e modos de corte (d) χ_{12} , (e) χ_{23} e (f) χ_{13} .



(a)



(b)



(c)

Figura 4.13: Y-periodicidade dos deslocamentos característicos — ilustração do modo de corte χ_{13} , utilizando 8 células representativas unitárias de material compósito de alumínio com inclusões (a) cilíndricas, (b) elipsoidais e (c) paralelepipedicas de carboneto de silício (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%).

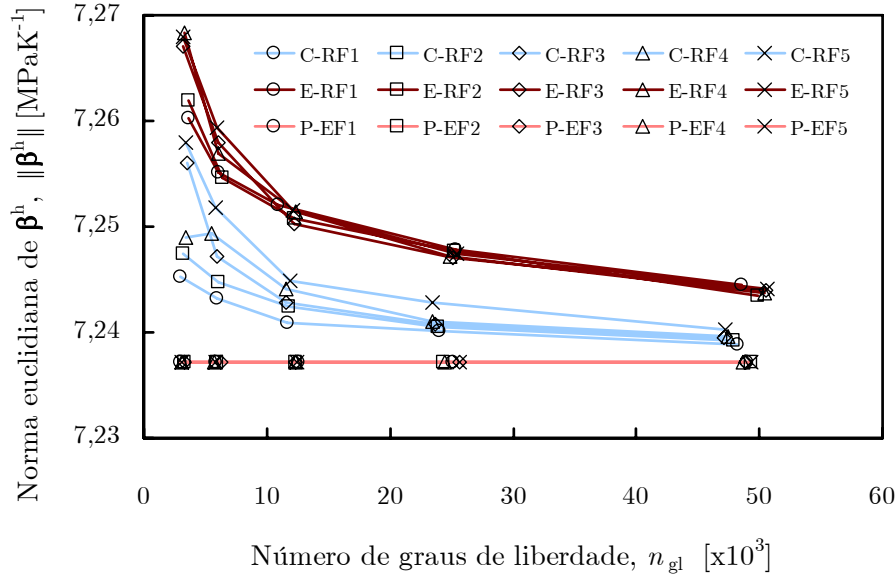


Figura 4.14: Evolução da norma euclidiana de β^h com o número de graus de liberdade, n_{gl} , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepípedicas (P) de carboneto de silício.

Como se referiu anteriormente, no contexto do método da homogeneização por expansão assintótica, as propriedades termoelásticas homogeneizadas são obtidas recorrendo ao campo dos coeficientes característicos de dilatação linear efectiva Ψ (ver equação 2.34). Nas figuras 4.17, 4.18 e 4.19 estão representados os campos vectoriais dos coeficientes característicos de dilatação linear efectiva Ψ de células representativas unitárias de materiais compósitos de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas, elipsoidais e paralelepípedicas, respectivamente, de carboneto de silício. Nestas figuras procede-se à representação de Ψ no exterior, no interior da matriz e no interior do reforço de cada uma das células representativas unitárias. Atenda-se ao facto de a utilização simultânea da matriz constitutiva \mathbf{D}^h e do vector β^h permitir a obtenção do vector homogeneizado dos coeficientes de expansibilidade térmica, α^h , obtendo-se este vector pela multiplicação da inversa da matriz homogeneizada (não-singular) de elasticidade pelo vector homogeneizado dos módulos térmicos:

$$\alpha^h = (\mathbf{D}^h)^{-1} \beta^h. \quad (4.3)$$

4.1.4 Análise de Resultados Numéricos de Condutividade Térmica

No que concerne as matrizes de condutividade térmica, \mathbf{k}^h , nos estudos de convergência efectuados para os vários tipos de inclusão também se verificou a convergência simultânea das componentes de cada vector \mathbf{k}^h . Deste modo, analogamente ao que foi efectuado nos estudos de convergência das matrizes \mathbf{D}^h e dos vectores β^h , analisam-se os resultados considerando a evolução da norma de Frobenius da matriz \mathbf{k}^h , $\|\mathbf{k}^h\|$, com o número de

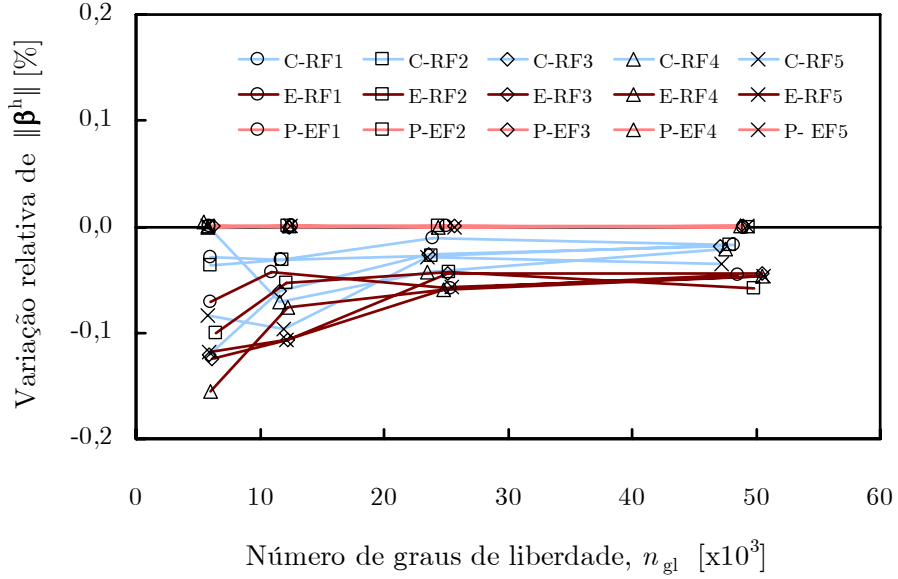


Figura 4.15: Evolução da variação relativa da norma euclidiana de β^h com o número de graus de liberdade, n_{gl} , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepípedicas (P) de carboneto de silício.

graus de liberdade, n_{gl} . Na figura 4.20 apresentam-se os resultados obtidos nos estudos de convergência com células representativas unitárias de material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepípedicas (P) de alumina. Por um lado, verifica-se, mais uma vez, que a evolução da norma de \mathbf{k}^h com o número de graus de liberdade, n_{gl} , para os vários tipos de inclusão considerados não apresenta características de instabilidade numérica. Por outro lado, verifica-se que os resultados numéricos se aproximam razoavelmente do limite de convergência para um número reduzido de graus de liberdade ($n_{gl} \simeq 12000$). Tal como se verificou para a norma de \mathbf{D}^h , tem-se que, para os diferentes tipos de inclusão, a norma de \mathbf{k}^h aumenta com a relação de forma RF . Também se constata que os valores estabilizados da norma de \mathbf{k}^h associados às inclusões paralelepípedica e cilíndrica são semelhantes, sendo ambos superiores aos associados à inclusão elipsoidal. Também se constata que os valores máximos da norma de \mathbf{k}^h correspondem às relações de forma $RF5$ associadas aos compósitos de fibras contínuas no caso das inclusões paralelepípedica e cilíndrica.

Na figura 4.21 ilustra-se a evolução da variação relativa da norma de Frobenius da matriz \mathbf{k}^h com o número de graus de liberdade, n_{gl} , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com os diferentes tipos de inclusão. Verifica-se que as malhas utilizadas dão origem, mesmo para as mais refinadas, a aproximações com variações relativas da ordem, em valor absoluto, de 10%. Esta característica poder-se-á dever ao facto de os valores da norma nas diferentes iterações serem da ordem da unidade, pelo que pequenas variações absolutas do valor da norma de \mathbf{k}^h ($\Delta\|\mathbf{k}^h\| \simeq 0,1$) dão origem a variações rela-

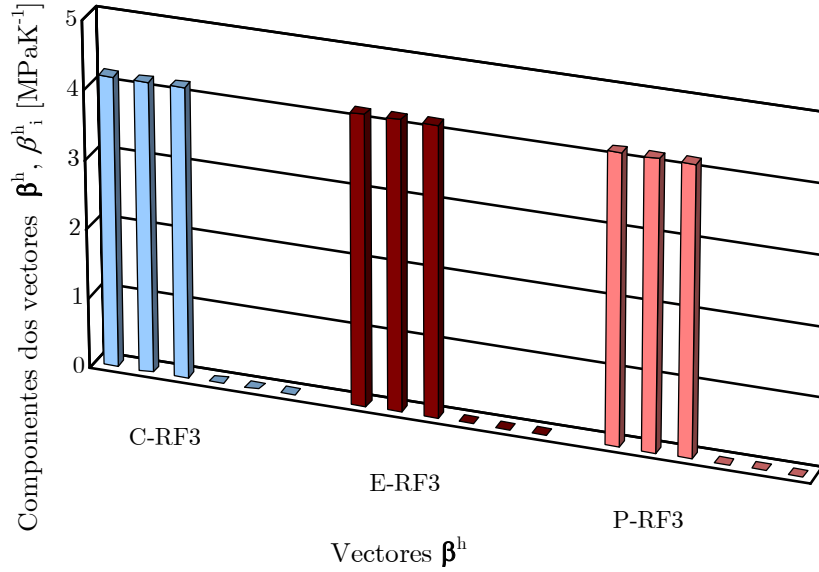
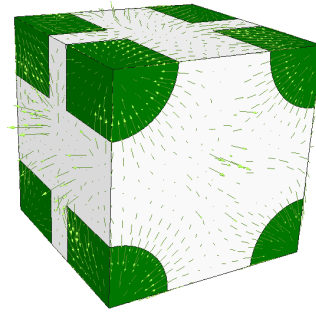


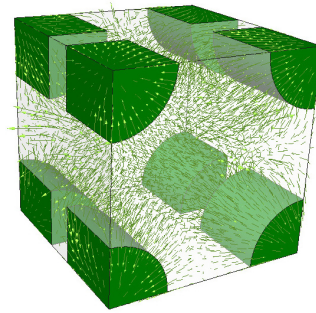
Figura 4.16: Componentes dos vetores dos módulos térmicos, β^h , obtidos para células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepípedicas (P) de carboneto de silício (relação de forma RF3 e fração volúmica de 20%).

tivas de cerca de 10%, e não se devendo os valores elevados de variação relativa da norma de \mathbf{k}^h , tal como observado na figura 4.20, obrigatoriamente à instabilidade numérica na evolução das normas de \mathbf{k}^h com o número de graus de liberdade, n_{gl} . Neste contexto, adoptaram-se as mesmas malhas de elementos finitos que nos estudos de convergência de \mathbf{D}^h e de β^h . Na figura 4.22 são apresentadas as componentes das matrizes homogeneizadas de condutividade, \mathbf{k}^h , obtidas para a relação de forma RF3 das células representativas unitárias de material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com os diferentes tipos de inclusão de alumina. Em termos das matrizes homogeneizadas de condutividade térmica \mathbf{k}^h , as simulações numéricas revelam que os valores associados às componentes das diagonais de \mathbf{k}^h são semelhantes para as inclusões paralelepípedica e cilíndrica, sendo estes superiores aos associados à inclusão elipsoidal. No entanto, os valores de condutividade térmica longitudinal k_L , correspondentes a k_{22} , são superiores aos de condutividade térmica transversal k_T , correspondentes a k_{11} e k_{33} , para os três tipos de inclusão.

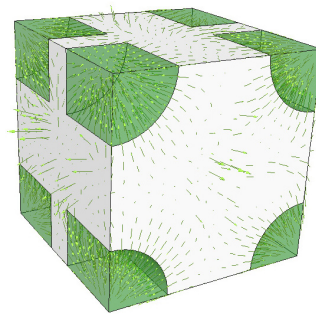
Por fim, no contexto do método da homogeneização por expansão assintótica, as propriedades de condutividade térmica homogeneizadas são obtidas recorrendo ao campo dos deslocamentos termocaracterísticos Υ (ver equação 2.28). Nas figuras 4.23, 4.24 e 4.25 estão representados os campos vectoriais dos deslocamentos termocaracterísticos Υ de células representativas unitárias de materiais compósitos de polietileno de alta densidade reforçado com inclusões cilíndricas, elipsoidais e paralelepípedicas, respectivamente, de alumina. Nestas figuras procede-se à representação de Ψ no exterior, no interior da matriz e no interior do reforço de cada uma das células representativas unitárias.



(a)

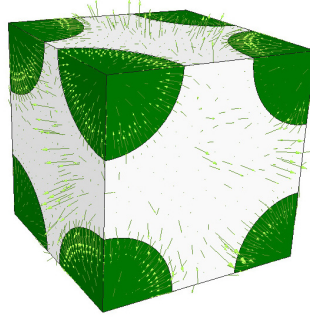


(b)

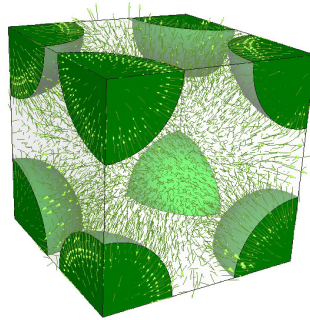


(c)

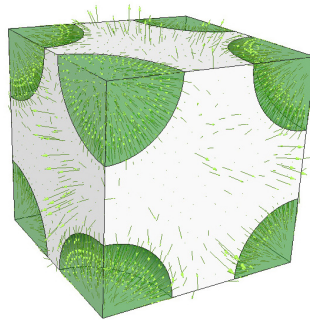
Figura 4.17: Campo vectorial dos coeficientes característicos de dilatação linear efectiva Ψ de uma célula representativa unitária de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas de carboneto de silício (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%) — representação (a) no exterior, (b) no interior da matriz e (c) no interior do reforço da célula representativa unitária.



(a)

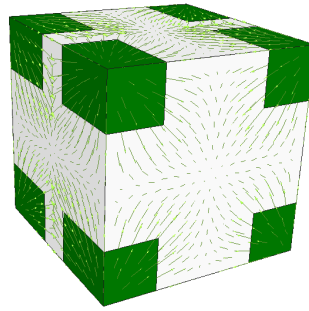


(b)

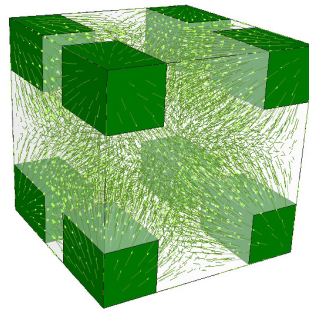


(c)

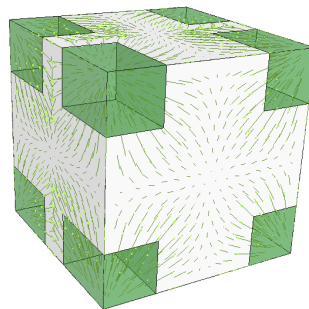
Figura 4.18: Campo vectorial dos coeficientes característicos de dilatação linear efectiva Ψ de uma célula representativa unitária de material compósito de alumínio reforçado com inclusões elipsoidais de carboneto de silício (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%) — representação (a) no exterior, (b) no interior da matriz e (c) no interior do reforço da célula representativa unitária.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.19: Campo vectorial dos coeficientes característicos de dilatação linear efectiva Ψ de uma célula representativa unitária de material compósito de alumínio reforçado com inclusões paralelepípedicas de carboneto de silício (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%) — representação (a) no exterior, (b) no interior da matriz e (c) no interior do reforço da célula representativa unitária.

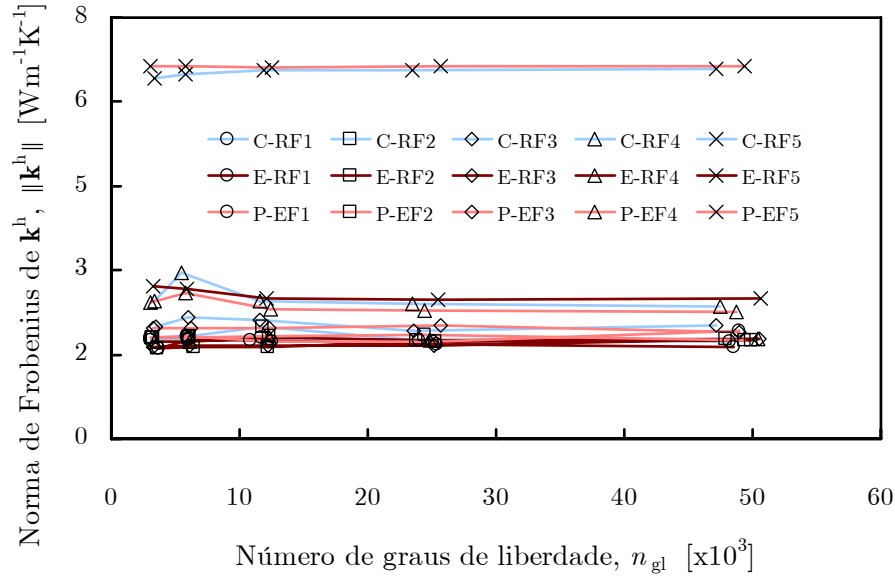


Figura 4.20: Evolução da norma de Frobenius de \mathbf{k}^h com o número de graus de liberdade, n_{gl} , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepípedicas (P) de alumina.

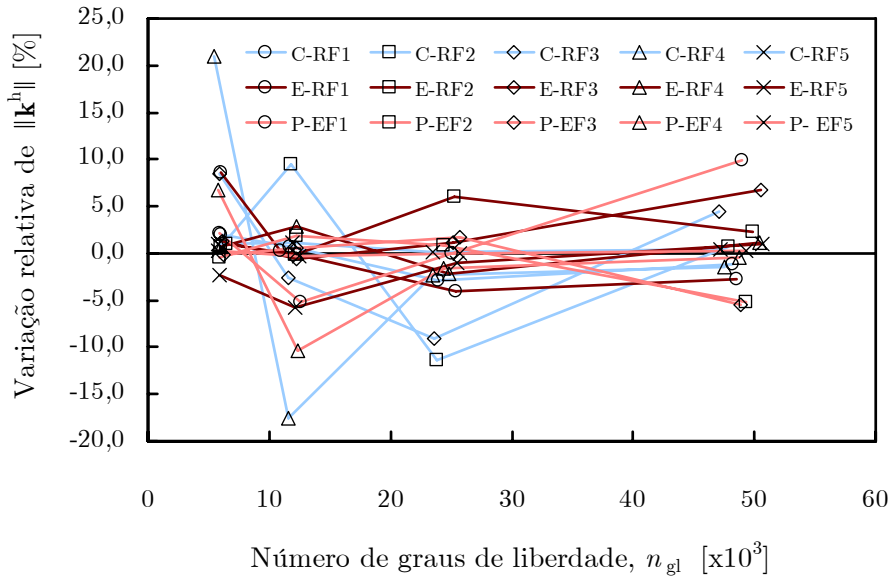


Figura 4.21: Evolução da variação relativa da norma de Frobenius de \mathbf{k}^h com o número de graus de liberdade, n_{gl} , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepípedicas (P) de alumina.

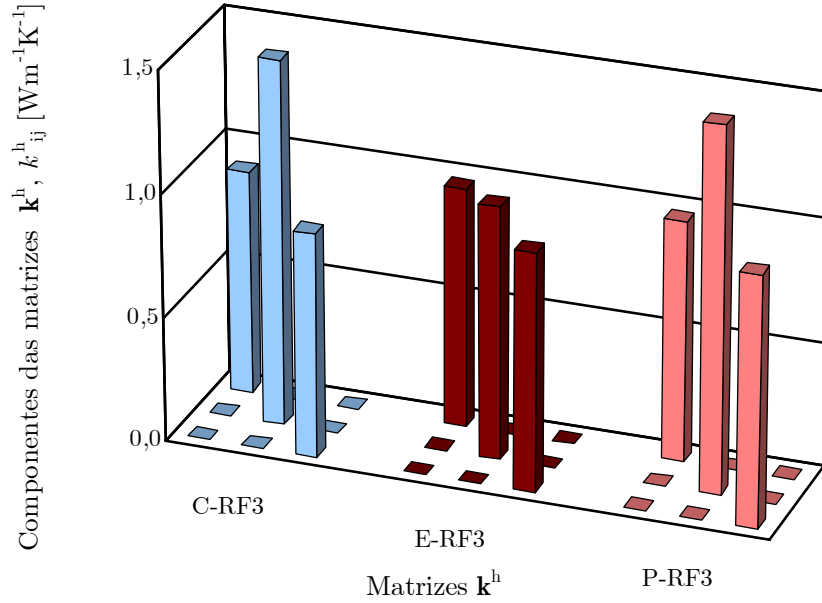
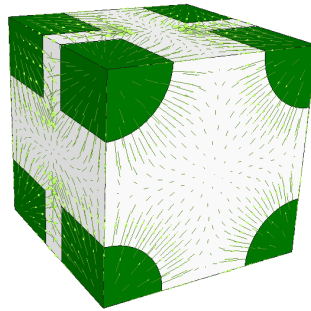


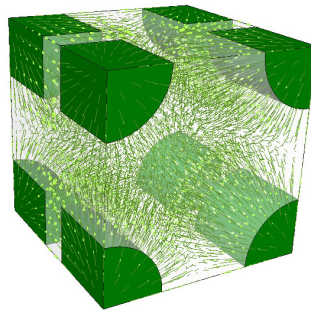
Figura 4.22: Componentes das matrizes de condutividade térmica, k^h , obtidas para células representativas unitárias de material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepípedicas (P) de alumina (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%).

4.1.5 Análise das Propriedades Termomecânicas

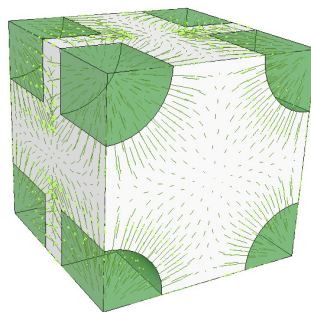
Com base nos resultados numéricos obtidos a partir dos estudos de convergência, procedeu-se à determinação das propriedades termomecânicas dos materiais compósitos. Assim, nas figuras 4.26 e 4.27 apresentam-se as evoluções, respectivamente, do módulo de elasticidade longitudinal na direcção das inclusões, E_{22} , e do coeficiente de expansibilidade térmica na direcção das inclusões, α_{22} , com a relação de forma, RF , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas, elipsoidais e paralelepípedicas de carboneto de silício, sendo ainda apresentados resultados experimentais ($E_{22} = 106$ GPa e $\alpha_{22} = 15,6$ MK⁻¹) [Chawla *et al.* 2003]. Verifica-se que as variações do módulo de elasticidade, E_{22} , para as inclusões cilíndrica e paralelepípedica têm um comportamento semelhante com a variação da relação de forma, RF , sendo o valor associado à inclusão cilíndrica superior ao da inclusão paralelepípedica na gama de valores de RF considerados. No que concerne aos resultados de E_{22} associados à inclusão elipsoidal, os seus valores iniciais são inferiores aos das restantes inclusões, mas para $RF \simeq 1,6$ estes superam os associados à inclusão paralelepípedica. Em relação ao coeficiente de expansibilidade térmica na direcção das inclusões, α_{22} , verifica-se um comportamento similar, mas em sentido decrescente. Neste caso, o valor associado à inclusão cilíndrica é inferior ao da inclusão paralelepípedica na gama de valores de RF considerados. Inicialmente os valores de α_{22} associados à inclusão elipsoidal são superiores aos das restantes inclusões, mas para $RF \simeq 1,3$ estes passam a ser inferiores aos associados à inclusão paralelepípedica. Experimentalmente



(a)

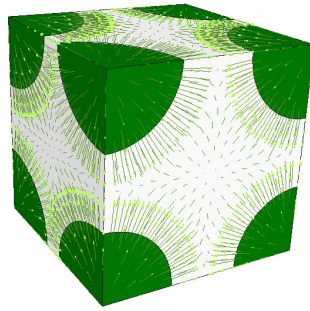


(b)

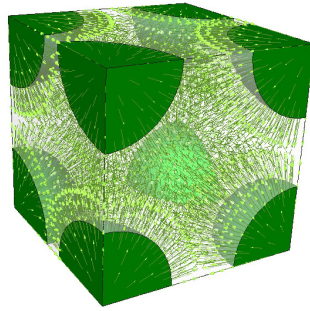


(c)

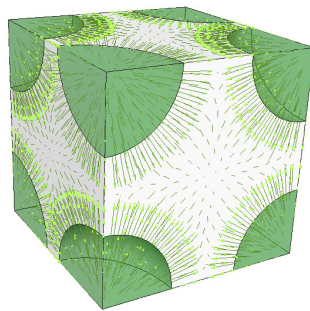
Figura 4.23: Campo vectorial dos deslocamentos termocaracterísticos Υ de uma célula representativa unitária de material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com inclusões cilíndricas de alumina (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%) — representação (a) no exterior, (b) no interior da matriz e (c) no interior do reforço da célula representativa unitária.



(a)

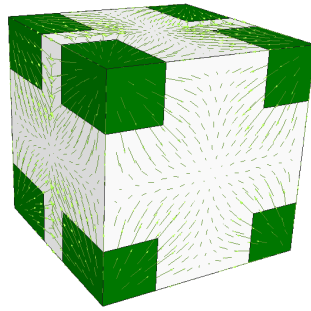


(b)

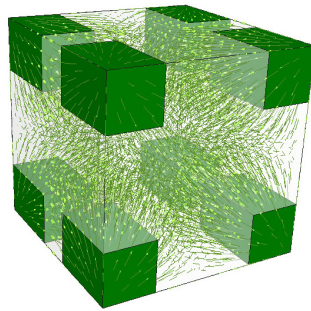


(c)

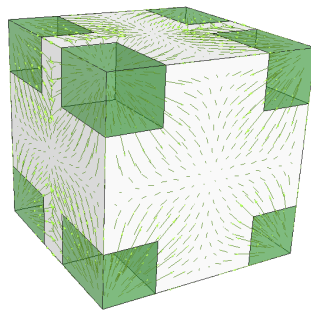
Figura 4.24: Campo vectorial dos deslocamentos termocaracterísticos \mathbf{u} de uma célula representativa unitária de material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com inclusões elipsoidais de alumina (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%) — representação (a) no exterior, (b) no interior da matriz e (c) no interior do reforço da célula representativa unitária.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.25: Campo vectorial dos deslocamentos termocaracterísticos Υ de uma célula representativa unitária de material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com inclusões paralelepédicas de alumina (relação de forma RF3 e fracção volúmica de 20%) — representação (a) no exterior, (b) no interior da matriz e (c) no interior do reforço da célula representativa unitária.

verificou-se que as partículas de carboneto de silício eram bastante irregulares, com uma vasta gama de tamanhos, formas e relações de forma [Chawla *et al.* 2003], pelo que o valor experimental pode ser visto como um valor médio. Por outro lado, verifica-se que os resultados experimentais de E_{22} e α_{22} intersectam as respectivas curvas numéricas em gamas correspondentes de RF distintas. No entanto, constata-se que uma boa correlação entre os resultados numéricos e experimentais pode ser obtida considerando uma inclusão elipsoidal com uma relação de forma $RF \simeq 1,4$.

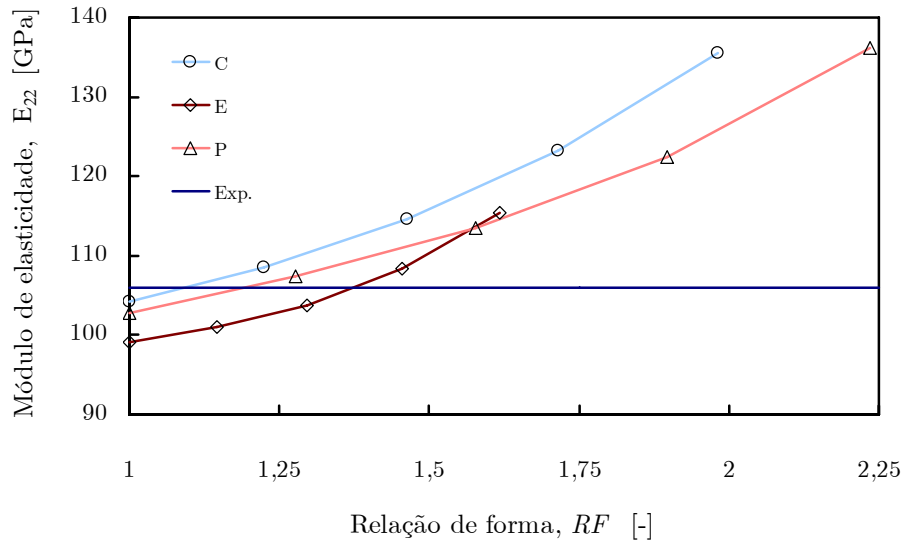


Figura 4.26: Evolução do módulo de elasticidade longitudinal na direcção das inclusões, E_{22} , com a relação de forma, RF , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepípedicas (P) de carboneto de silício, e resultado experimental.

Na figura 4.28 são apresentados os resultados relativos à evolução do coeficiente de condutividade térmica na direcção das inclusões, k_{22} , com a relação de forma, RF , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com inclusões cilíndricas, elipsoidais e paralelepípedicas de alumina, e resultado experimental ($k_{22} = 1,22 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$) [Tavman 2004]. Constata-se que para valores reduzidos da relação de forma e até $RF \simeq 1,45$, os valores do coeficiente de condutividade térmica na direcção das inclusões, k_{22} , são praticamente independentes quer de RF quer do tipo de inclusão considerada. Nesta gama de relações de forma, os resultados numéricos praticamente coincidem com o resultado experimental. Por outro lado, para valores de relação de forma superiores, tem-se que, na gama de RF considerada, que os resultados associados à inclusão cilíndrica são superiores aos da inclusão paralelepípedica.

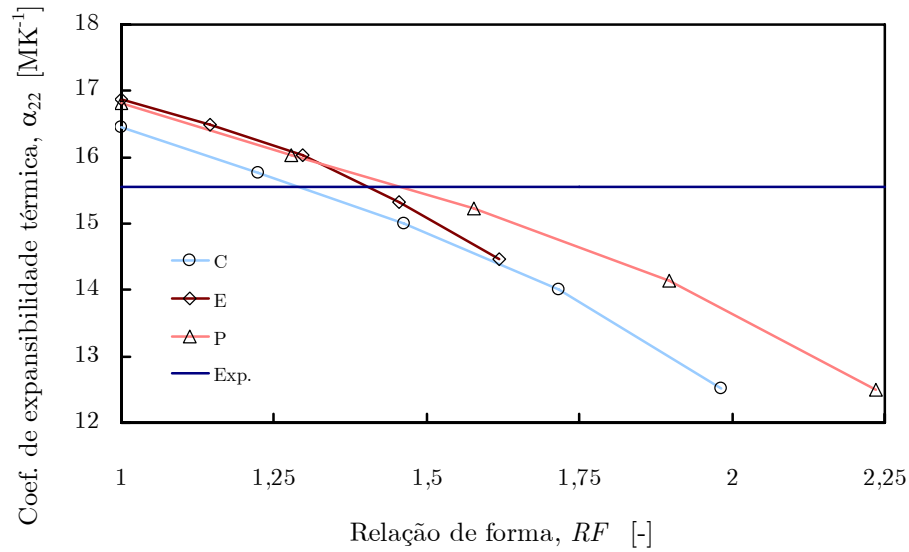


Figura 4.27: Evolução do coeficiente de expansibilidade térmica na direcção das inclusões, α_{22} , com a relação de forma, RF , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de alumínio reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepípedicas (P) de carboneto de silício, e resultado experimental.

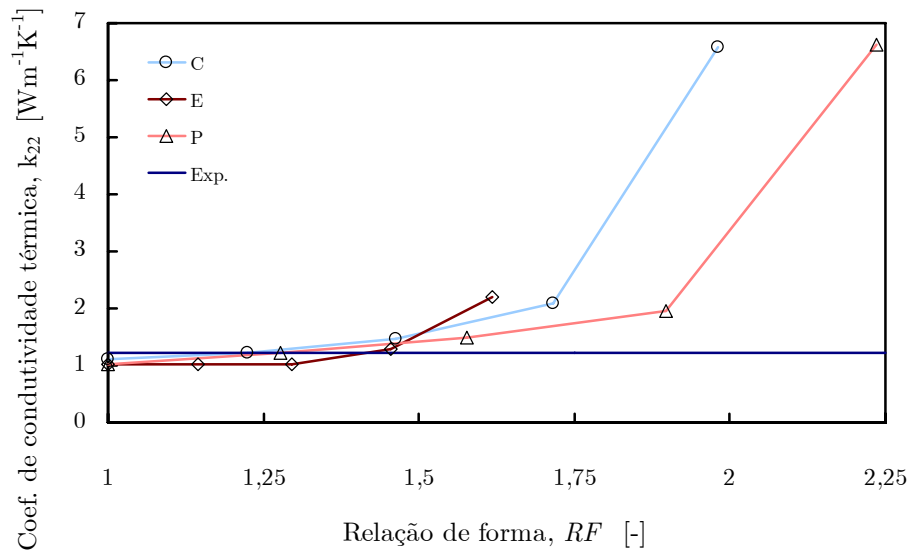


Figura 4.28: Evolução do coeficiente de condutividade térmica na direcção das inclusões, k_{22} , com a relação de forma, RF , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepípedicas (P) de alumina, e resultado experimental.

4.2 Análise da Influência das Propriedades dos Materiais da Matriz e do Reforço

Neste capítulo procede-se à análise da influência das propriedades dos materiais da matriz e do reforço nas propriedades termoelásticas efectivas de materiais compósitos, em conjunto com efeito da geometria da célula representativa unitária. Assim, efectua-se a análise das propriedades efectivas de diferentes tipos de material compósito, definidos, para as várias células representativas unitárias anteriormente apresentadas, pela consideração de diversos materiais para a matriz e para o reforço, que correspondem a:

- Alumina [Hsieh e Tuan 2005, Hsieh e Tuan 2007, Lim 2002];
- Cobre [Sun e Inal 1996, Yoshida e Morigami 2004];
- Diamante [Sun e Inal 1996, Yoshida e Morigami 2004];
- Nitrato de alumínio [Hsieh e Tuan 2005, Hsieh e Tuan 2007];
- Resina epóxida [Marur 2004, Lim 2002];
- Sílica [Lim 2002];
- Vidro [Marur 2004].

Na tabela 4.6 são apresentados os materiais considerados e as correspondentes propriedades que foram utilizadas na análise. Com base nestes materiais e nos definidos no capítulo an-

Tabela 4.6: Materiais considerados e respectivas propriedades termomecânicas.

Material	E [GPa]	ν [-]	α [MK ⁻¹]	k [Wm ⁻¹ K ⁻¹]
Alumina (Al ₂ O ₃)	401	0,24	7,3	36
Cobre (Cu)	131,6	0,34	16,42	-
Diamante (C)	894,9	0,24	2,3	-
Nitrato de alumínio (NiAl)	186	0,31	14	-
Resina Epóxida	3	0,35	-	0,195
Sílica (SiO ₂)	-	-	-	1,5
Vidro	69	0,15	-	1,4

terior, consideraram-se diferentes tipos de material compósito, definidos pela associação de um par matriz-reforço. Assim, em função das propriedades a estudar, foram considerados 3 agrupamentos de materiais compósitos:

- Determinação das propriedades elásticas:
 - Nitrato de alumínio (matriz) – Alumina (reforço) — RE1=2,2;
 - Alumínio (matriz) – Carboneto de silício (reforço) — RE2=5,6;
 - Cobre (matriz) – Diamante (reforço) — RE3=6,8;
 - Resina epóxida (matriz) – Vidro (reforço) — RE4=23,0;

- Determinação das propriedades elásticas:
 - Nitrato de alumínio (matriz) – Alumina (reforço) — $Ralfa1=1,9$;
 - Alumínio (matriz) – Carboneto de silício (reforço) — $Ralfa2=5,1$;
 - Cobre (matriz) – Diamante (reforço) — $Ralfa3=7,1$;
- Determinação das propriedades térmicas:
 - Resina epóxida (matriz) – Sílica (reforço) — $Rk1=7,7$;
 - Vidro (matriz) – Alumina (reforço) — $Rk2=25,7$;
 - Polietileno de alta densidade (matriz) – Alumina (reforço) — $Rk3=56,9$;
 - Resina epóxida (matriz) – Alumina (reforço) — $Rk4=184,6$.

Na definição dos agrupamentos, definem-se as razões do módulo de elasticidade por $RE = E_r/E_m$, do coeficiente de expansibilidade térmica $Ralfa = \alpha_r/\alpha_m$ e do coeficiente de condutividade térmica por $Rk = k_r/k_m$. Com base neste conjunto de materiais compósitos procedeu-se, de modo análogo ao efectuado no capítulo anterior, à determinação das suas propriedades termomecânicas. A título de exemplo, na figura 4.29 apresenta-se a evolução do coeficiente de expansibilidade térmica na direcção das inclusões, α_{22} , com a relação de forma, RF , para células representativas unitárias de material compósito de cobre reforçado com inclusões cilíndricas, elipsoidais e paralelepípedicas de diamante, sendo ainda apresentado um resultado experimental ($\alpha_{22} = 12,24 \text{ MK}^{-1}$) [Sun e Inal 1996]. Verifica-se que o resultado experimental se aproxima do numérico associado a uma inclusão esférica. No entanto, embora as inclusões não sejam esféricas, verifica-se experimentalmente que apresentam uma relação de forma próxima de 1 [Sun e Inal 1996]. Na figura 4.30, apresentam-se resultados de evolução do coeficiente de condutividade térmica na direcção das inclusões, k_{22} , com a relação de forma, RF , para células representativas unitárias de material compósito de resina epóxida reforçado com inclusões cilíndricas, elipsoidais e paralelepípedicas de sílica. É ainda apresentado um resultado experimental ($k_{22} = 0,29 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$) [Lim 2002]. Neste caso, mais uma vez se verifica que o resultado numérico associado à inclusão esférica é o que mais se aproxima do resultado experimental, o que está de acordo com a realidade, visto as inclusões de sílica utilizadas no fabrico do material compósito serem esféricas [Lim 2002].

Tendo sido obtidos os resultados numéricos associados aos materiais compósitos em estudo, procedeu-se à adimensionalização dos mesmos, de modo a se poder fazer uma análise acerca da influência das propriedades da matriz e do reforço. Assim, considerou-se uma adimensionalização $\bar{\eta}$ de uma propriedade numérica η correspondente, sendo η_m e η_r as propriedades da matriz e do reforço, a

$$\bar{\eta} = \frac{\eta - \eta_m}{\eta_r - \eta_m}, \quad (4.4)$$

em que implicitamente se considera que $\eta_m < \eta_r$. À grandeza correspondente à adimensionalização de η , chamaremos, no seguimento do texto, factor (adimensional) de η . Neste contexto, nas figuras 4.31, 4.32 e 4.33 são apresentados os valores adimensionalizados de E_{22} , α_{22} e k_{22} , respectivamente, para os agrupamentos de materiais compósitos anteriormente definidos. Verifica-se que na variação dos factores (adimensionais) de E_{22} e k_{22} os

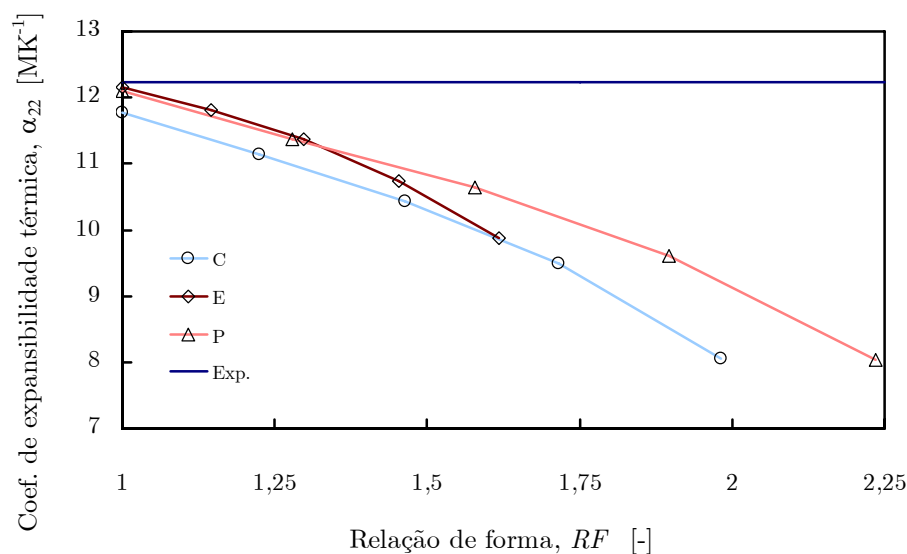


Figura 4.29: Evolução do coeficiente de expansibilidade térmica na direcção das inclusões, α_{22} , com a relação de forma, RF , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de cobre reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepípedicas (P) de diamante, e resultado experimental.

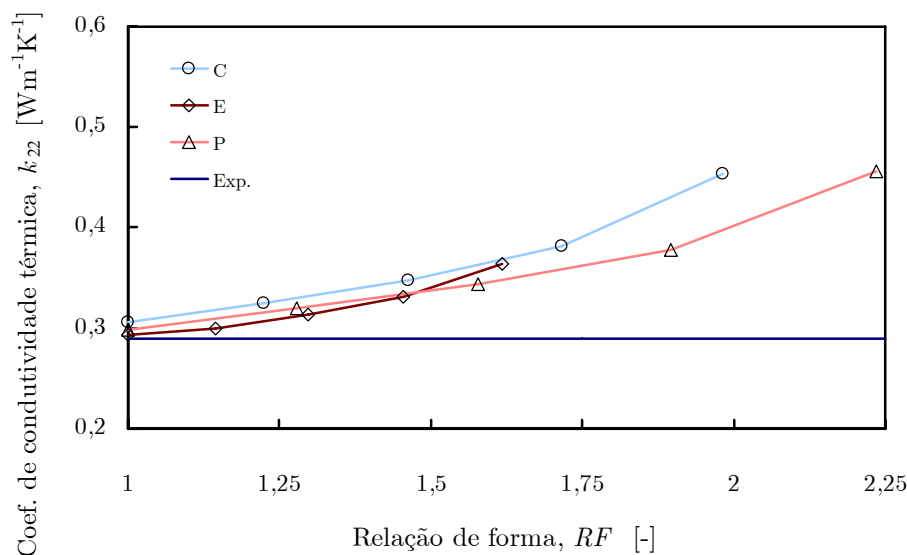


Figura 4.30: Evolução do coeficiente de condutividade térmica na direcção das inclusões, k_{22} , com a relação de forma, RF , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito de resina epóxida reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepípedicas (P) de sílica, e resultado experimental.

resultados numéricos convergem, em relação às inclusões cilíndrica e paralelepipedica, para a relação de forma máxima, que corresponde a uma fibra contínua. assim, pode concluir-se que para fibras contínuas de secção quadrada ou circular os valores homogeneizados de módulo de elasticidade e do coeficiente de condutividade térmica não dependem das propriedades dos constituintes do material compósito. No entanto, para inclusões cilíndricas ou paralelepipedicas não contínuas, tem-se que as referidas propriedades dependem da relação das propriedades do reforço-matriz (RE ou Rk), conforme se pode constatar nas figuras 4.31 e 4.33. Pelo contrário, da figura 4.32 conclui-se que o coeficiente homogeneizado de expansibilidade térmica para fibras contínuas depende das propriedades da matriz e do reforço, isto é, é sempre dependente das propriedades dessas propriedades. Por outro lado, de acordo com as definições apresentadas para $RE = E_r/E_m$, $Ralpha = \alpha_r/\alpha_m$ e $Rk = k_r/k_m$, verifica-se que a diminuição de qualquer destes factores induz o aumento do correspondente factor (adimensional).

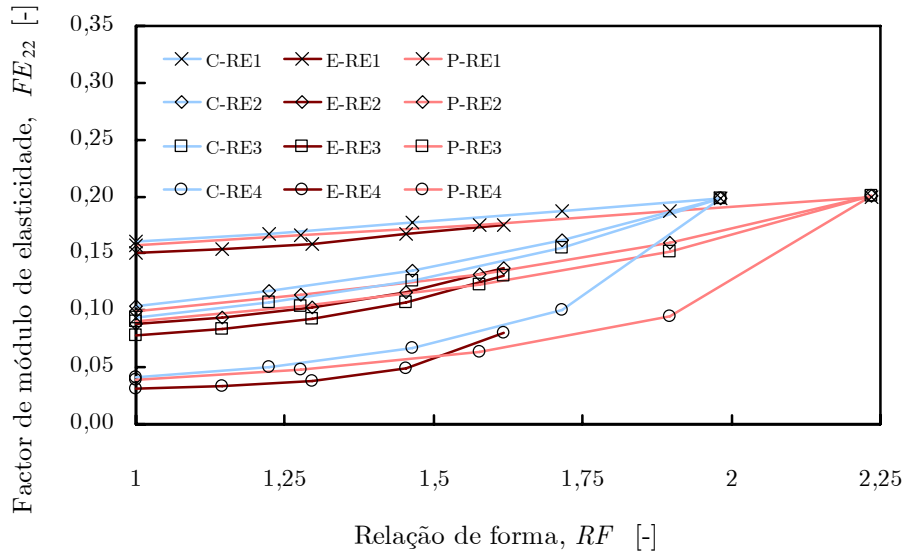


Figura 4.31: Evolução do factor (adimensional) do módulo de elasticidade longitudinal na direcção das inclusões, E_{22} , com a relação de forma, RF , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepipedicas (P).

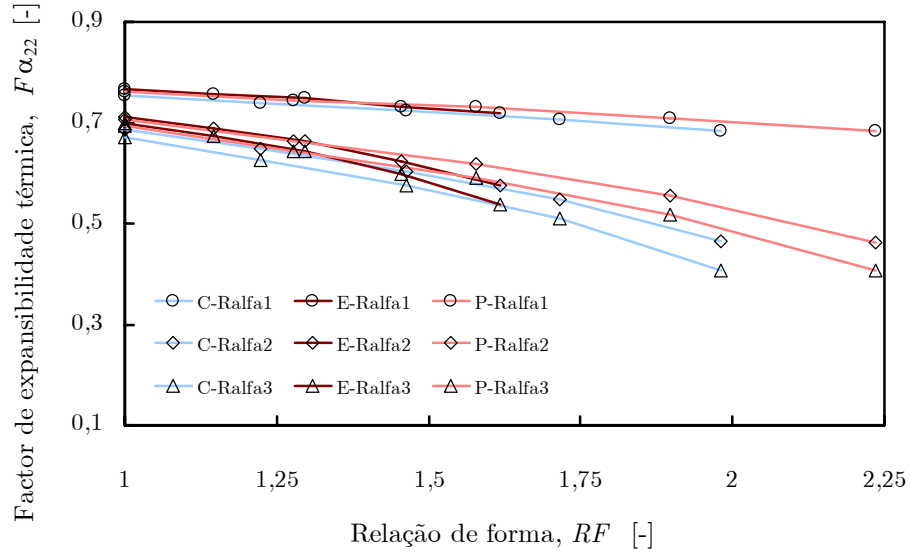


Figura 4.32: Evolução do factor (adimensional) do coeficiente de expansibilidade térmica na direcção das inclusões, α_{22} , com a relação de forma, RF , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepípedicas (P).

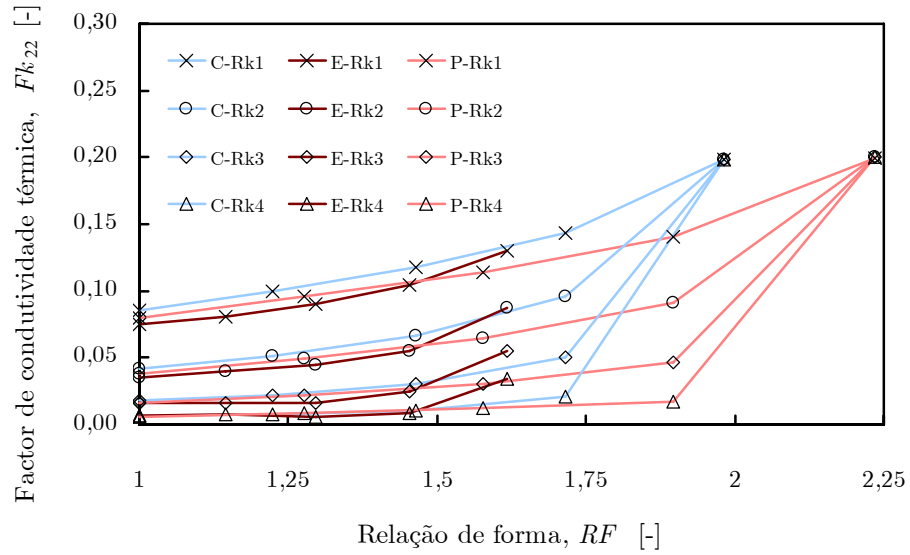


Figura 4.33: Evolução do factor (adimensional) do coeficiente de condutividade térmica na direcção das inclusões, k_{22} , com a relação de forma, RF , para os vários estudos de convergência efectuados com células representativas unitárias de material compósito reforçado com inclusões cilíndricas (C), elipsoidais (E) e paralelepípedicas (P).

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

Capítulo 5

Conclusões Gerais

O principal objectivo deste trabalho consistiu na análise da influência da geometria da célula representativa unitária nos valores das propriedades termoelásticas efectivas de materiais compósitos, utilizando procedimentos numéricos de homogeneização por expansão assintótica. Este trabalho foi desenvolvido no âmbito da investigação levada a cabo no GRIDS–DiFrACT [Oliveira 2006, Pinho-da-Cruz 2007], no Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro.

Numa primeira fase, foi realizada uma significativa revisão bibliográfica da influência da geometria microestrutural nas propriedades efectivas de materiais compósitos e de resultados experimentais. Uma vez encontrados valores experimentais representativos e adequados ao estudo proposto, passou-se à definição das várias células representativas unitárias a considerar nas análises numéricas.

Posteriormente, procedeu-se à geração das células representativas unitárias adoptadas e, com a sub-rotina SLAVERY e o programa COMMA3D, efectuou-se um estudo do efeito da geometria da célula representativa unitária nas propriedades termoelásticas de materiais compósitos. Os resultados numéricos foram analisados, tendo sido efectuado o seu estudo de convergência. Este estudo foi complementado pela análise do efeito das propriedades dos materiais da matriz e do reforço nos resultados numéricos, e a comparação de resultados numéricos com resultados experimentais oriundos de fontes bibliográficas.

Em termos gerais, constatou-se que os resultados numéricos obtidos com base no método de homogeneização por expansão assintótica aproximaram adequadamente os resultados experimentais obtidos, podendo ainda afirmar-se que a técnica de homogeneização por expansão assintótica se revelou bastante eficaz na análise da influência da geometria da célula representativa unitária nos valores das propriedades termoelásticas efectivas de materiais compósitos.

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

Bibliografia

- [Banks-Sills *et al.* 1997] L. Banks-Sills, V. Leiderman e D. Fang; On the Effect of Particle Shape and Orientation on Elastic Properties of Metal Matrix Composites, *Composites Part B — Engineering* **28B**(4):465–481, 1997.
- [Bensoussan *et al.* 1978] A. Bensoussan, J.-L. Lions e G. Papanicolaou; *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland, Amesterdão, Países Baixos, 1978.
- [Chawla *et al.* 2003] N. Chawla, B.V. Patel, M. Koopman, K.K. Chawla, R. Saha, B.R. Patterson, E.R. Fuller e S.A. Langer; Microstructure-Based Simulation of Thermomechanical Behavior of Composite Materials by Object-Oriented Finite Element Analysis, *Materials Characterization* **49**(5):395–407, 2003.
- [Cioranescu e Donato 1999] D. Cioranescu e P. Donato; *An Introduction to Homogenization*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, Vol.17, Oxford University Press, Oxford, Reino Unido, 1999.
- [De Giorgi e Spagnolo 1973] E. De Giorgi e S. Spagnolo; Sulla Convergenza degli Integrali dell'Energia per Operatori Ellitici del Secondo Ordine, *Bollettino della Unione Matematica Italiana* **8**(4):391–411, 1973.
- [Ferreira 2007] P.S.A. Ferreira; *Homogeneização de Propriedades Termoelásticas de Materiais Compósitos*, Tese de Mestrado em Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Aveiro, Portugal, 2007.
- [Hsieh e Tuan 2005] C.L. Hsieh e W.H. Tuan; Elastic Properties of Ceramic-Metal Particulate Composites, *Materials Science and Engineering A* **393**(1–2):133–139, 2005.
- [Hsieh e Tuan 2007] C.L. Hsieh e W.H. Tuan; Thermal Expansion Behavior of a Model Ceramic-Metal Composite, *Materials Science and Engineering A* **460–461**:453–458, 2007.
- [Lim 2002] T.C. Lim; Unified Pratical Bounds for the Thermal Conductivity of Composite Materials, *Materials Letters* **54**(2):152–157, 2002.
- [Marur 2004] P.R. Marur; Estimation of Effective Elastic Properties and Interface Stress Concentrations in Particulate Composites by Unit Cell Methods, *Acta Materialia* **52**:1263–1270, 2004.
- [Maxwell 1873] J.C. Maxwell; *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Clarendon Press, Oxford, Reino Unido, 1873.

- [Oliveira 2006] J.A.D. Oliveira; *Modelação Micromecânica do Comportamento de Materiais Compósitos de Matriz de Alumínio*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal, 2006.
- [Oliveira *et al.* 2004] J.A. Oliveira, J. Pinho-da-Cruz, A. Andrade-Campos e F. Teixeira-Dias; *On the Modelling of Representative Unit-Cell Geometries with GiD*, Actas da 2nd Conference on Advances and Applications of GiD — GiD 2004, Monografia CIMNE n.º 88, CIMNE, Barcelona, Espanha, pp. 181–184, 2004.
- [Pinho-da-Cruz 2007] J.A.M. Pinho-da-Cruz; *Caracterização Termomecânica da Materiais Multifásicos Utilizando Procedimentos de Homogeneização*, Dissertação de Tese de Doutoramento em Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Aveiro, Portugal, 2007.
- [Poisson 1824] S.D. Poisson; *Second Mémoire sur la Théorie du Magnétisme*, Académie Royale des Sciences de l’Institut de France **5**:488–533, 1824.
- [Rayleigh 1892] J.W. Rayleigh; On the Influence of Obstacles Arranged in Rectangular Order upon the Properties of a Medium, *Philosophical Magazine* **34**(5):481–502, 1892.
- [Rizzo 1991] A.R. Rizzo; Estimating Errors in FE Analyses, *Mechanical Engineering — CIME — Computers in Mechanical Engineering* **113**(5):61–63, 1991.
- [Sanchez-Palencia 1970] E. Sanchez-Palencia; Solutions Périodiques par Rapport aux Variables d’Espace Applications, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences — Série A–B* **271**:A1129–A1132, 1970.
- [Sanchez-Palencia 1980] E. Sanchez-Palencia; *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics, Vol. 127, Springer-Verlag, Berlim, Alemanha, 1980.
- [Spagnolo 1968] S. Spagnolo; Sulla Convergenza di Soluzioni di Equazioni Paraboliche ed Ellittiche, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* **22**(3):571–597, 1968.
- [Sun e Inal 1996] Q. Sun e O.T. Inal; Fabrication and Characterization of Diamond/Copper Composites for Thermal Management Substrate Applications; *Materials Science and Engineering B* **41**(2):261–266, 1996.
- [Tavman 2004] I.H. Tavman; *Thermal Conductivity of Particle Reinforced Polymer Composites*, Actas do NATO Advanced Study Institute on Nanoengineered Nanofibrous Materials — Nanoengineered Nanofibrous Materials, S. Guceri, Y. Gogotsi e V. Kuznetsov (editores), NATO Science Series — II: Mathematics, Physics and Chemistry, Vol. 169, Kluwer Academic Book Publishers, Dordrecht, Países Baixos, pp.451–457, 2004.
- [Yoshida e Morigami 2004] K. Yoshida e H. Morigami; Thermal Properties of Diamond/Copper Composite Material, *Microelectronics Reliability* **44**(2):303–308, 2004.